

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

М. П. Бурик, Л. Ю. Спінул, В. Ю. Лободзинський

ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітніми програмами «Електротехнічні пристрої та електротехнологічні
комплекси», «Нетрадиційні та відновлювальні джерела енергії», «Електричні
станції», «Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та
електромобільність» та «Електричні машини і апарати»
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Рецензенти: Цивінський С. С., канд. техн. наук, доц., кафедра
електромеханіки

Відповідальний
редактор Спінул Л. Ю., канд. техн. наук, доц.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 13.05.2021 р.) за поданням Вченої ради факультету електроенерготехніки та автоматики (протокол № 9 від 26.04.2021 р.)

Електронне мережне навчальне видання
Бурик Микола Петрович, канд. техн. наук, доц.
Спінул Людмила Юріївна, канд. техн. наук, доц.
Лободзинський Вадим Юрійович, канд. техн. наук, доц.

ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА

Лінійні електричні кола однофазного синусоїдного струму: Розрахунково-графічна робота [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітніми програмами «Електротехнічні пристрої та електротехнологічні комплекси», «Нетрадиційні та відновлювальні джерела енергії», «Електричні станції», «Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність» та «Електричні машини і апарати» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / М. П. Бурик, Л. Ю. Спінул, В. Ю. Лободзинський; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 19,7 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 150 с.

Представлено основні положення для аналізу електричних кіл однофазного синусоїдного струму із зосередженими параметрами без врахування взаємної індукції та з врахуванням магнітного зв'язку між індуктивними елементами комплексним методом. Наведено правила та приклади побудови векторної діаграми струмів та топографічної діаграми напруг. Розглянуто електричні кола синусоїдного струму у режимах резонансу струмів та напруг. Представлено алгоритм побудови частотної характеристики електричного кола. Приведено правила виконання електричних схем відповідно до єдиної системи конструкторської документації та державного стандарту України.

Призначений для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

© М. П. Бурик, Л. Ю. Спінул, В. Ю. Лободзинський 2021

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

ЗМІСТ

	стор.
Вступ.....	5
Основні положення.....	6
1 Правила виконання електричних схем.....	15
1.1 Загальні вимоги до виконання електричних схем.....	16
1.2 Правила оформлення нормативних документів.....	19
2 Комплексні числа та їх геометрична інтерпретація.....	22
3 Представлення синусоїдних величин комплексними числами.....	27
4 Розрахунок кола синусоїдного струму символічним методом.....	30
5 Баланс потужностей електричного кола.....	38
6 Топографічні діаграми напруг та векторна діаграма струмів.....	39
7 Резонансні режими в електричному колі.....	44
8 Частотні характеристики електричного кола.....	55
9 Методичні вказівки до розрахунку синусоїдних струмів в електричному колі з взаємною індуктивністю.....	59
9.1 Розрахунок електричних кіл при наявності взаємної індукції.....	65
9.2 Послідовне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок.....	68
9.3 Паралельне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок.....	70
9.4 Баланс потужностей у колах з взаємною індукцією.....	75
9.5 Еквівалентна заміна індуктивних зв'язків.....	76
10 Вказівки до розрахунку чотириполюсника.....	82
11 Завдання до розрахунково-графічної роботи.....	91
Бібліографічний список використаної літератури.....	96
Додаток А Приклад оформлення розрахунково-графічної роботи.....	98

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ДСТУ – державного стандарту України

ЕРС – електрорушійна сила

ЕСКД – єдина система конструкторської документації

КЗ – коротке замикання

НХ – неробочий хід

РГР – розрахунково-графічна робота

УГЗ – умовне графічне зображення

УГП – умовне графічне позначення

B – реактивна провідність

E – ідеальне джерело ЕРС

G – активна провідність

I – електричний струм

P – активна потужність

Q – реактивна потужність

R – активний опір

S – повна потужність

U – електрична напруга

X – реактивний опір

α – коефіцієнт згасання

β – коефіцієнт фази

γ – коефіцієнт поширення

ϕ – потенціал електричного поля

ψ – початкова фаза

ВСТУП

Під час вивчення освітньої компоненти "Теоретичні основи електротехніки" необхідно отримати практичні знання, що набуваються при аналізі електричних кіл змінного струму. Тому метою навчального посібника до виконання РГР є засвоєння студентами основ теорії лінійних кіл синусоїдного струму за допомогою символічного методу та векторних діаграм і ознайомлення з загальними правилами виконання електричних схем відповідно до єдиної системи конструкторської документації та державного стандарту України.

У посібнику представлено дослідження кола змінного струму без взаємної індукції комплексним методом, визначення показу вольтметра, векторна діаграма струмів та топографічна діаграма напруг, визначення умов резонансу в електричному колі, частотна характеристика кола. Також виконано розрахунок електричного кола при наявності магнітного зв'язку між індуктивними елементами та побудовано векторну діаграму струмів і топографічну діаграму напруг (на діаграмі позначені напруги взаємної індукції). Проаналізовано пасивний чотиріполюсник, визначено його первинні і вторинні параметри для системи рівнянь A -форми та розраховано значення параметрів елементів R , L , C для T - або Π - схем заміщення. Достовірність розрахованих струмів та напруг у електричних схемах перевірено за балансом активних та реактивних потужностей електричного кола.

Для зручності виконання РГР посібник має додаток А, в якому показано приклад оформлення завдання та розрахунок електричного кола синусоїдного струму. Також наведено індивідуальні варіанти для самостійного виконання студентами РГР. Номер варіанта для студента задає викладач, який проводить практичні заняття. Навчальний посібник призначений для студентів денної та заочної форм навчання, які вивчають освітню компоненту "Теоретичні основи електротехніки".

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

Основні визначення, що використовуються під час аналізу електричних кіл змінного струму наведено у [1-2]. Наведемо декілька термінів, що пов'язані з РГР:

Електромагнітне поле (electromagnetic field) – вид матерії, що визначається в усіх точках двома векторними величинами, які характеризують дві його сторони, що називаються відповідно «електричне поле» та «магнітне поле», які чинять силовий вплив на заряджені частинки, що залежать від їх швидкості і величини їх заряду.

Електричне поле (electric field) – прояв електромагнітного поля, що характеризується впливом на електрично заряджену частинку з силою, яка пропорційна заряду частинки і не залежить від її швидкості.

Магнітне поле (magnetic field) – прояв електромагнітного поля, що характеризується впливом на рухомі електричні заряджені частинки з силою, пропорційною заряду частинки та її швидкості.

Електрорушійна сила (electromotive force) – скалярна величина, якою характеризують здатність стороннього поля та індукованого електричного поля викликати електричний струм.

Електромагнітна індукція (electromagnetic induction) – явище збудження електрорушійної сили у провідному контурі внаслідок зміни зчепленого з ним магнітного потоку.

Магнітна індукція (magnetic flux density) B – векторна величина, якою характеризують інтенсивність магнітного поля за величиною сили, що діє на рухому заряджену частинку з боку магнітного поля. *Магнітна індукція чисельно дорівнює відношенню сили, що діє на заряджену частинку, до добутку заряду та швидкості частинки за умови, що напрямок швидкості такий, що ця сила максимальна і має напрямок, перпендикулярний до векторів сили і швидкості, який збігається з поступальним переміщенням*

правого гвинта в разі обертання його від напрямку сили до напрямку швидкості частинки із позитивним зарядом.

Магнітний потік (magnetic flux) Φ – потік вектора магнітної індукції крізь поверхню, скалярна величина, що зображує магнітне поле у вигляді замкнутого вихрового матеріального потоку, зміни якого у часі (похідна у часі від магнітного потоку) дорівнює електрорушійній силі контуру, який охоплює цей потік.

Самоіндукція (self-induction) – електромагнітна індукція, викликана зміною зчепленого з провідним контуром магнітного потоку, який зумовлений електричним струмом цього контуру.

Взаємна індукція (mutual induction) – електромагнітна індукція, викликана зміною зчепленого з провідним контуром магнітного потоку, який зумовлений електричними струмами в інших контурах.

Електричний опір (electrical resistance) R – чинник теплового розсіювання електричної енергії, який визначають як відношення постійної напруги на ділянці електричного кола до постійного струму в ній в разі відсутності на ділянці ЕРС.

Електромагнітна енергія (electromagnetic energy) – енергія електромагнітного поля, яка є сумою енергій електричного та магнітний полів.

Резистор (resistor) – елемент електричного кола, призначений для використання його електричного опору (ДСТУ 2382).

Конденсатор (capacitor) – елемент електричного кола, призначений для використання його ємності (ДСТУ 2291).

Ємність конденсатора (capacitance of a capacitor) C – електрична ємність між електродами конденсатора, тобто частка від ділення заряду конденсатора на напругу на ньому.

Потокозчеплення (linkage flux) – сума, магнітних потоків, які охоплюють провідник елемента електричного кола, зокрема індуктивну котушку.

Потокозчеплення самоіндукції (linkage flux of self-induction) – потокозчеплення елемента електричного кола, викликане електричним струмом в цьому ж елементі.

Власна індуктивність (inductance) L – скалярна величина, яка дорівнює відношенню потокозчеплення самоіндукції елемента електричного кола до його струму.

Індуктивна котушка або котушка індуктивності (inductor) – елемент електричного кола, що являє собою сукупність витків, призначений для використання його індуктивності.

Потокозчеплення взаємної індукції (linkage flux of conductivity) – потокозчеплення елемента електричного кола, викликане електричним струмом іншого елемента кола.

Взаємна індуктивність (mutual inductance) M – скалярна величина, яка дорівнює відношенню потокозчеплення взаємної індукції одного елемента електричного кола до струму в іншому елементі, який викликає це потокозчеплення.

Електричне коло із зосередженими параметрами (lumped circuit) – електричне коло, якому резистори, індуктивності та електричні ємності вважають зосередженими на окремих ділянках цього кола, тобто яке можна подати скінченною сукупністю ідеальних елементів.

Лінійне електричне коло – електричне коло, електричні параметри якого не залежать від значень та напрямків струмів і напруг кола.

Схема заміщення – схема електричного кола, яка відображає властивості кола за певних умов.

Еквівалентна електрична схема – електрична схема заміщення, в якій величини, що підлягають розгляду, мають ті ж значення, що й у вихідній схемі заміщення.

Зв'язані електричні кола – електричні кола, процеси у яких впливають один на одного через спільні магнітні чи електричні поля.

Гальванічний зв'язок (електричних кіл) – зв'язок кількох електричних кіл, зумовлений електричним полем у провідному середовищі.

Індуктивний зв'язок (електричних кіл) – зв'язок кількох електричних кіл, зумовлених магнітним полем.

Активний електричний опір (resistance) R – параметр електричного кола синусоїдного струму чи його елемента, що характеризує здатність теплового розсіювання електричної енергії і який визначають як відношення активної потужності, що поглинається пасивними елементами цього електричного кола, до квадрату діючого струму на вході цього кола чи елемента.

Активна провідність G – величина, обернена до активного електричного опору.

Повний електричний опір або імпеданс Z – параметр електричного кола синусоїдного струму чи його елемента, який дорівнює відношенню діючої напруги на затискачах пасивного електричного кола до діючого струму на вході цього кола за синусоїдних напруги та струму.

Повна електрична провідність опір або адмітанс Y – параметр електричного кола синусоїдного струму чи його елемента, який дорівнює відношенню діючого струму на вході пасивного електричного кола до діючої напруги на його затискачах за синусоїдних напруги та струму.

Реактивний опір або реактанс X - параметр електричного кола синусоїдного струму чи його елемента, який дорівнює кореню квадратному із різниці квадратів повного та активного опору кола, взятий із знаком плюс, якщо струм відстає за фазою від напруги, і із знаком мінус, якщо струм випереджує за фазою напругу.

Реактивна провідність або цепенс B - параметр електричного кола синусоїдного струму чи його елемента, який дорівнює кореню квадратному із різниці квадратів повної та активної провідності, якщо , взятий із знаком плюс, якщо струм відстає за фазою від напруги, і із знаком мінус, якщо струм випереджує за фазою напругу.

Двополюсник (two-terminal circuit element) – частина електричного кола з двома виділеними затискачами, які називаються полюсами.

Чотириполюсник (two-port network) – частина електричного кола, яка має дві пари вивідних затискачів.

Розглянемо основні параметри синусоїдної функції:

Змінний електричний струм – електричний струм, який змінюється у часі (рис. 1).

Миттєвий електричний струм $i = i(t)$ - значення електричного струму в даний момент часу (рис. 1).

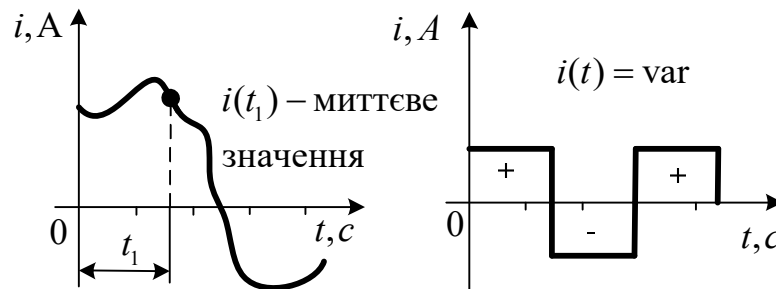


Рисунок 1 – Змінний струм

Періодичний електричний струм – електричний струм, миттєві значення якого повторюються через рівні проміжки часу

$$i = f(t + T) = f(t - T) = f(t), \quad (1)$$

де T – *період електричного струму* (найменший інтервал часу, через який повторюються миттєві значення періодичного електричного струму), с.

Синусоїдний електричний струм – періодичний електричний струм, який є синусоїдною функцією часу (рис. 2, а)

$$i = I_m \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \psi_i) = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi_i) = I_m \sin \left[\omega \cdot \left(t + \frac{\Psi_i}{\omega} \right) \right], \quad (2)$$

де $I_m = \sqrt{2}I$ – *максимальне значення струму*, (амплітуда), А;

I – діюче значення синусоїдного струму, А;

$\omega t + \psi_i$ – фаза синусоїдної функції, рад або (градусах);

ψ_i – початкова фаза синусоїдного струму (значення фази синусоїдного струму в момент часу $t = 0$), рад або (градусах);

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ – кутова частота синусоїдного електричного струму (*angular frequency*) (швидкість зміни фази струму, яка дорівнює частоті синусоїдної електричного струму, помножений на 2π), рад/с або (с^{-1});

$f = \frac{1}{T}$ – лінійна частота електричного струму (*phase*) (величина обернена до періоду електричного струму), Гц.

Синусоїдну функцію струму (2) (рис. 2, а) представимо у комплексній формі (векторна діаграма на рис. 2, б). Де вектор \underline{I}_m обертається з сталою кутовою швидкістю ω проти годинникової стрілки

$$\underline{I}_m = a + j \cdot b = I_m \cos(\psi_i) + j \cdot I_m \sin(\psi_i). \quad (3)$$

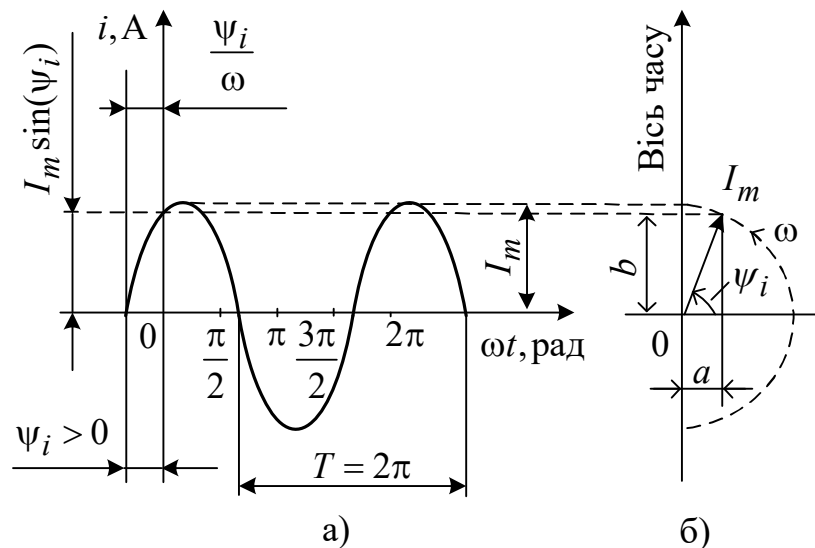


Рисунок 2 – Графік синусоїдного електричного струму (а) та зображення вектора \underline{I}_m на комплексній площині (б)

На (рис. 3, а) зображені синусоїдні напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u)$ та струм $i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i)$ однакової частоти, для яких $\psi_u < 0, \psi_i > 0, \varphi < 0$. Векторна діаграма – сукупність векторів комплексних синусоїдних величин однієї частоти (рис 3, б).

Алгебраїчна величина, яка дорівнює різниці початкової фази напруги та початкової фази струму називається зсувом фаз (*phase difference*) між синусоїдною напругою та струмом φ

$$\varphi = \psi_u - \psi_i \quad (4)$$

За знаком та величиною кута φ визначають характер електричного кола:

$\varphi > 0$ – напруга випереджає струм, індуктивний характер кола;

$\varphi = 0$ – напруга і струм співпадають за фазою, активний характер кола;

$\varphi < 0$ – напруга відстає від струму, ємнісний характер кола рис. 3.

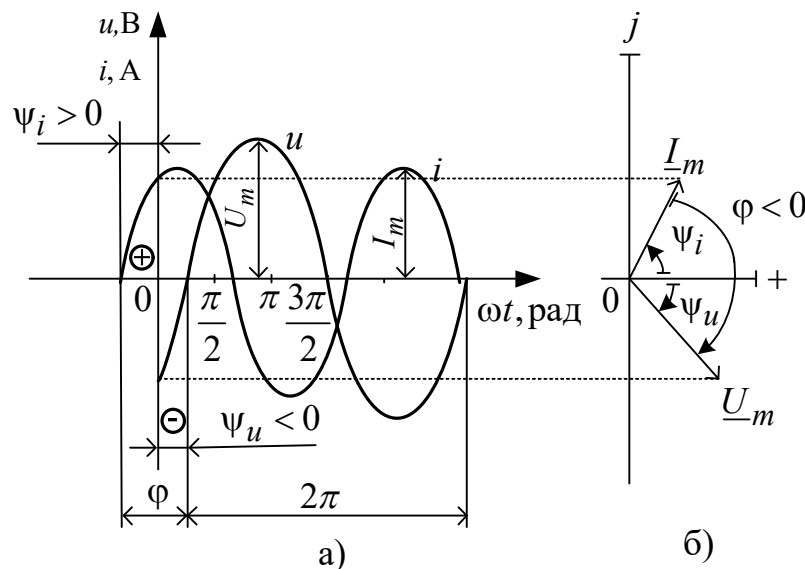


Рисунок 3 – Графік синусоїдних величин напруги та струму (а) та векторна діаграма (б)

Розглянемо приклад отримання синусоїдної ЕРС рис. 4.

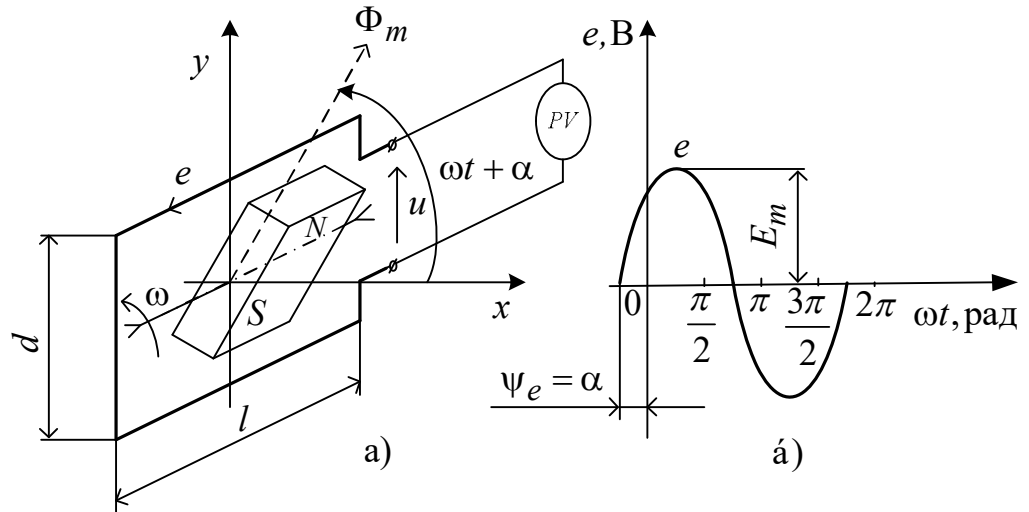


Рисунок 4 – Двополюсний електромеханічний генератор ЕРС (а) та графік миттєвого значення ЕРС (б)

Генератор має нерухомий (розімкнутий) віток $w=1$ та постійний магніт з потоком Φ_m , що обертається з кутовою частотою ω . Максимальне значення ЕРС (*правило правої руки*) спостерігається під час розташування магніту та вітка в одній площині (рис. 4, б) та визначається згідно з законом електромагнітної індукції [3]

$$\begin{aligned}
 \Phi_x &= \Phi_m \cos(\omega t + \alpha) = \Phi_m \sin(\omega t + (\alpha + \frac{\pi}{2})); \\
 e &= -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{dw\Phi_x}{dt} = -\frac{dw\Phi_m \sin(\omega t + (\alpha + \frac{\pi}{2}))}{dt} = -w\Phi_m \omega \cos(\omega t + (\alpha + \frac{\pi}{2})) = \\
 &= -w\Phi_m \omega \sin(\omega t + (\alpha + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) = -w\Phi_m \omega \sin(\omega t + (\alpha + \pi)) = \\
 &= -w\Phi_m \omega (-\sin(\omega t + \alpha)) = 1 \cdot \Phi_m \omega \sin(\omega t + \alpha) = B_m S \frac{v}{d} \sin(\omega t + \alpha) = \\
 &= B_m l \cancel{d} \frac{v}{\cancel{d}} \sin(\omega t + \alpha) = E_m \sin(\omega t + \alpha) = \boxed{E_m \sin(\omega t + \psi_e)}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Під *середнім значенням* синусоїдного струму I_{cp} розуміють середнє значення за додатній півперіод, що співпадає з середнім значенням за модулем (використовують при аналізі роботи перетворювачів). Середнє по модулю значення за період – висота прямокутника, площа S якого, дорівнює площі фігури, що обмежена півхвилею синусоїди рис. 5 [4].

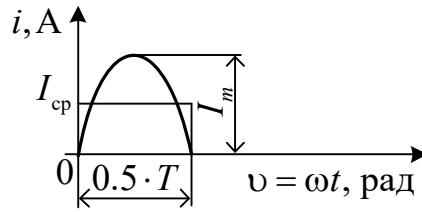


Рисунок 5 – Середнє по модулю значення

Розрахуємо середнє струму (6) при $\psi_i = 0$

$$\begin{aligned}
 I_{cp} &= \frac{S}{\frac{T}{2}} = \frac{\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \, dt}{\frac{T}{2}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin(\omega t) \, dt = \frac{2}{T\omega} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin(\omega t) d(\omega t) = \\
 &= \frac{2I_m}{T\omega} (-\cos(\omega t)) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2I_m}{\cancel{T} \cancel{\omega} \pi} (-\cos(\omega t)) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
 &= \frac{I_m}{\pi} (-\cos(\frac{\cancel{T} \pi}{\cancel{\omega}}) - \cos(\omega \cdot 0)) = \frac{I_m}{\pi} (-(-1 - 1)) = \frac{2I_m}{\pi} = \boxed{0.637 \cdot I_m}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Більшість електровимірювальних приладів (наприклад, електромагнітної системи) показують не амплітуду і не середнє значення, а, так зване, *діюче* або *ефективне* значення синусоїдної величини. *Діюче значення синусоїдного* струму – середнє квадратичне значення електричного струму за період T , яке дорівнює значенню постійного струму, який в тому самому резисторі, що й змінний електричний струм, за один і той самий проміжок часу виділяє однакову кількість тепла [4]. За закон Джоуля - Ленца під час $\psi_i = 0$

$$\begin{aligned}
 R \int_0^T i^2 \, dt &= I^2 R \cdot T; \\
 I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} I_m^2 \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt} = \tag{7} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{T} I_m^2 (\int_0^T \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\omega t) \cdot dt)} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} t} \Big|_0^T = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}} = \boxed{\frac{I_m}{\sqrt{2}}}.
 \end{aligned}$$

1 ПРАВИЛА ВИКОНАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ СХЕМ

ЄСКД призначена для встановлення в організаціях та на підприємствах єдиних правил виконання, оформлення та обертання конструкторської документації [5]. Отже *елементи електричного кола зображують на схемах у вигляді умовних графічних зображень (УГЗ) відповідно до правил ЄСКД та ДСТУ*, згідно яких:

- *схема* – це конструкторський документ, на якому представлені у вигляді УГЗ або позначень (УГП) складові частини виробу та зв'язки між ними;

- *елемент схеми* – це складова частина схеми, яка виконує певну функцію у виробі та не може бути розділена на частини, має самостійне призначення та власне графічне та літерно-цифрове позначення;

- *лінія взаємозв'язку* – відрізок лінії, який показує наявність зв'язку між функціональними складовими виробу згідно з ГОСТ 2.701-84.

Схема електрична – це документ, в якому представлені у вигляді УГЗ або позначень складові частини виробу, що діють за допомогою електричної енергії, та їх взаємозв'язку згідно з ДСТУ ГОСТ 2.702:2013.

Схеми електричні у залежності від їх основного призначення розділяють на наступні *типи*: структурні; функціональні; принципів; з'єднань; підключення; загальні; розміщення. *Дозволяється розміщувати на схемі пояснювальні надписи, діаграми або таблиці*, які визначають черговість процесів у часі, а також параметри у характерних точках (величини струмів).

Під час оформлення графічної частини розрахункової роботи (електричні схеми) треба дотримуватись правил, що наведені в ДСТУ ГОСТ 2.702:2013:

- елементи та пристрої зображують на схемі у вигляді УГЗ;
- порядкові номери елементам слід надавати, починаючи з одиниці, у межах групи елементів, яким на схемі надано однакове літерне позначення, наприклад *R1, R2 та R3*;

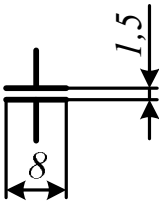
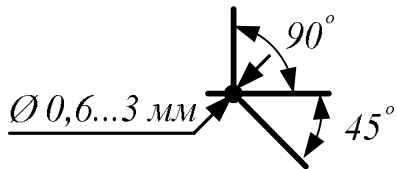
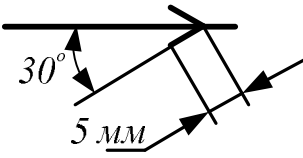
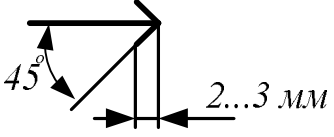
- *порядкові номери* потрібно надавати у відповідності до розміщення елементів та пристроїв на схемі *зверху до низу у напрямку зліва направо*;
- позиційні позначення проставляють на схемі біля УГЗ елементів з правої сторони або згори. Дозволяється позиційне позначення проставляти у середині прямокутника УГЗ;
- на схемі рекомендується вказувати технічні характеристики функціональних частин (біля графічного позначення або на вільній ділянці схеми);
- при вказівці біля УГП номіналів резисторів допускається застосовувати спрощений спосіб позначення одиниць величин, наприклад від 0 до 999 Ом величини одиниць не проставляються.

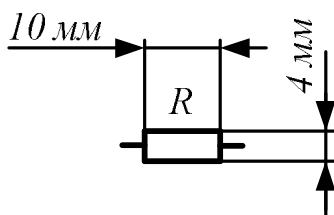
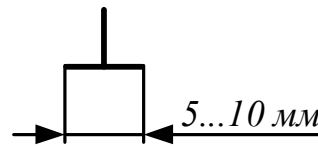
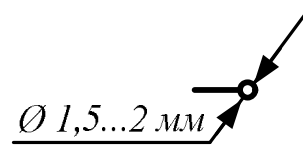
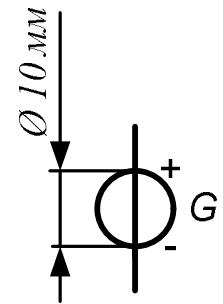
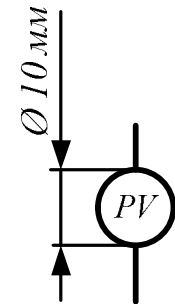
1.1 Загальні вимоги до виконання електричних схем

1. Відстань між сусідніми паралельними лініями зв'язку не повинно бути менше 3,0 мм. Відстань між окремими УГЗ повинно бути не менше 2,0 мм згідно з ГОСТ 2.701-84.
2. Усі розміри графічних зображень дозволяється пропорційно змінювати.
3. Лінії зв'язку виконують товщиною від 0,2 до 1,0 мм в залежності від форматів схеми та розмірів графічних позначень. Рекомендована товщина лінії від 0,3 до 0,4 мм.
4. Графічні зображення на схемах необхідно виконувати тієї ж товщиною, що і лінії зв'язку згідно з ГОСТ 2.728-74.
5. УГЗ елементів представляють на схемі в положенні, в якому вони приведені у відповідних стандартах, або оберненими на кут, кратний 90°, якщо у відповідних стандартах відсутні спеціальні вказівки.

У табл. 1 наведено умовні графічні зображення електричних елементів та їх найменування, які використовуються при оформленні РГР.

Таблиця 1 – Умовні графічні позначення елементів електричної схеми

№	Найменування елемента	Графічне зображення та позначення елемента
1	Котушка індуктивності (загальний символ, дросель без магнітопроводу. Для позначення початку обмотки використовують крапка згідно з [ГОСТ 2.723-68, ІЕС 617-4:1996]	
2	Конденсатор сталої ємності (загальний символ) згідно з [ГОСТ 2.728-74, ІЕС 617-4:1996]	
3	Лінія електричного зв'язку із двома відгалуженнями, які дозволяють зображувати під кутами, що кратні 45° згідно з ГОСТ 2.721-74	
4	Напрямок енергетичного потоку (сигнал електричний в одному напрямку) згідно з ГОСТ 2.721-74	
5	Контакт роз'ємного з'єднання згідно з ГОСТ 2.755-87	

№	Найменування елемента	Графічне зображення та позначення елемента
6	Резистор постійний згідно з ГОСТ 2.728-74	
7	Електричне з'єднання з корпусом згідно з ГОСТ 2.721-74	
8	Контакт розбірного з'єднання згідно з ГОСТ 2.755-87	
7	Ідеальне джерело напруги [ГОСТ 2.721-74, ІЕС 617-2:1996]	
9	Прилад електровимірювальний згідно з ГОСТ 2.747-68 Літерно-цифрове позначення вольтметра на електричних схемах згідно з ГОСТ 2.710-81	

1.2 Правила оформлення нормативних документів

Оформлюючи РГР необхідно дотримуватись загальних вимог та правил у сфері науки й техніки відповідно до ДСТУ 3008:2015:

- звіт друкують шрифтом *Times New Roman* чорного кольору прямого накреслення через півтора-два міжрядкові інтервали кеглем 14;
- розмір шрифту для написання заголовків у рядках та колонках таблиць і пояснювальних даних на рисунках і в таблицях встановлює виконавець звіту;
- звіт як паперовий документ друкують з використанням комп'ютера та принтера на одному боці аркуша білого паперу формату А4 (210 мм x 297 мм). Рекомендовано на сторінках звіту використовувати береги такої ширини: верхній і нижній — не менше ніж 20 мм, лівий — не менше ніж 25 мм, правий — не менше ніж 10 мм;
- для розділів і підрозділів наявність заголовка обов'язкова. Пункти та підпункти можуть мати заголовки. Заголовки структурних елементів звіту та заголовки розділів треба друкувати з абзацного відступу великими літерами напівжирним шрифтом *без крапки в кінці*. Дозволено їх розміщувати посередині рядка;
- заголовки підрозділів, пунктів і підпунктів звіту потрібно друкувати з абзацного відступу з великої літери *без крапки в кінці*. Абзацний відступ має бути однаковий упродовж усього тексту звіту й дорівнювати п'яти знакам. Якщо заголовок складається з кількох речень, їх розділяють крапкою. Розривати слова знаком переносу в заголовках заборонено. Відстань між заголовком, приміткою, прикладом і подальшим або попереднім текстом має бути не менше ніж два міжрядкових інтервали. Відстань між основами рядків заголовка, а також між двома заголовками приймають такою, як у тексті звіту;
- усі графічні матеріали звіту (*діаграми, графіки, схеми, рисунки*) повинні мати однаковий підпис **«Рисунок»**. Рисунки нумерують наскрізно

арабськими цифрами, крім рисунків у додатках. Дозволено рисунки нумерувати в межах кожного розділу. Назва рисунка має відображати його зміст, бути конкретною та стислою. За потреби пояснювальні дані до рисунка подають безпосередньо після графічного матеріалу перед назвою рисунка. Назву рисунка друкують з великої літери та розміщують під ним посередині рядка, наприклад, «**Рисунок 2.1 — Схема електрична**»;

- формули та рівняння подають посередині сторінки симетрично тексту окремим рядком безпосередньо після тексту, у якому їх згадано. Найвище та найнижче розташування запису формул(и) має бути на відстані не менше ніж один рядок від попереднього й наступного тексту. Нумерують лише ті формули, на які є посилання в тексті звіту чи додатка. Формули у звіті, крім рівнянь у додатках, треба нумерувати наскрізно арабськими цифрами. Дозволено їх нумерувати в межах кожного розділу. Номер формули чи рівняння друкують на їх рівні праворуч у крайньому положенні в круглих дужках, *наприклад* (3). У багаторядкових формулах або рівняннях їхній номер проставляють на рівні останнього рядка;

- цифровий матеріал, як правило, оформлюють у вигляді таблиць. Таблицю слід розташовувати безпосередньо після тексту, у якому вона згадується вперше, або на наступній сторінці. На всі таблиці мають бути посилання в тексті звіту. Таблиці слід нумерувати арабськими цифрами порядковою нумерацією в межах розділу, за винятком таблиць, що наводяться у додатках. Номер таблиці складається з номера розділу і порядкового номера таблиці, відокремлених крапкою, наприклад, таблиця 2.1 - перша таблиця другого розділу. Таблиця може мати назву, яку друкують невеликими літерами (крім першої) і вміщують над таблицею. Назва має бути стислою і відбивати зміст таблиці. Якщо рядки таблиці виходять за межі формату сторінки, таблицю поділяють на частини, розміщуючи одну частину під одною, або поруч, або переносючи частину таблиці на наступну сторінку, повторюючи в кожній частині таблиці її верхню та бокові частини. При поділі таблиці на частини допускається її головну або бокову частини

заміняти відповідно номерами стовпчиків чи рядків, нумеруючи їх арабськими цифрами у першій частині таблиці. Слово "**Таблиця __**" вказують один раз зліва над першою частиною таблиці, над іншими частинами пишуть: "Продовження таблиці __" з зазначенням номера таблиці. Заголовки таблиці починають з великої літери, а підзаголовки - з малої, якщо вони складають одне речення з заголовком. Підзаголовки, що мають самостійне значення, пишуть з великої літери. В кінці заголовків та підзаголовків таблиць крапки не ставлять. Заголовки і підзаголовки вказують в однині;

- *посилаючись на позицію переліку*, треба зазначити номер структурного елемента звіту та номер позиції переліку з круглою дужкою, відокремлені комою. *Посилання на джерело інформації*, наведене в переліку джерел посилання, рекомендовано подавати так: номер у квадратних дужках, за яким це джерело зазначено в переліку джерел посилання, наприклад, «у роботах [2]— [3]»;

- Додатки слід оформлювати як продовження звіту на його наступних сторінках, або у вигляді окремої частини, розташовуючи додатки в порядку появи посилань на них у тексті звіту. Якщо додатки оформлюють на наступних сторінках звіту, кожний такий додаток повинен починатися з нової сторінки. Додаток повинен мати заголовок, надрукований вгорі малими літерами з першої великої симетрично відносно тексту сторінки. Посередині рядка над заголовком малими літерами з першої великої повинно бути надруковано слово "Додаток __" і велика літера, що позначає додаток. Якщо додаток оформлюють окремою частиною звіту, то такий додаток повинен мати титульний аркуш, у якому подають всі дані. Після номера частини повинні бути надруковані великими літерами слово "ДОДАТОК __" та його назва (якщо є) (див. додаток В.2), або слово "ДОДАТКИ". Додатки слід позначати послідовно великими літерами української абетки, за винятком літер Ї, Є, З, І, Ї, Й, О, Ч, Ъ, наприклад, додаток А, додаток Б і т. п. Один додаток позначається як додаток А.

2 Комплексні числа та їх геометрична інтерпретація

Комплексне число $\underline{A} = a + j \cdot b$, що відповідає точці, у якій лежить кінець вектора \underline{A} (рис. 6), може бути написано в наступних формах [6-7]

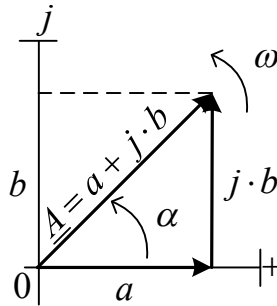


Рисунок 6 – Комплексна площина

$$\underline{A} = \underbrace{a + j \cdot b}_{\text{алгебраїчна}} = \underbrace{A \cdot \cos \alpha + j \cdot A \cdot \sin \alpha}_{\text{тригонометрична}} = \underbrace{A \cdot e^{j \cdot \alpha}}_{\text{показникова}} = \underbrace{A \angle \alpha}_{\text{полярна(кутова)}}, \quad (8)$$

де $a = A \cdot \cos \alpha = \operatorname{Re} A$ – реальна частина комплексного числа \underline{A} ;

$b = A \cdot \sin \alpha = \operatorname{Im} A$ – уявна частина комплексного числа \underline{A} ;

$j = \sqrt{-1} = e^{j \cdot 90^\circ} = e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$ – уявна одиниця або оператор оберту на кут $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ (множення на \boxed{j} повертає вектор проти годинникової стрілки на кут

90° , а множення на $\boxed{-j = e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}}$ обертає вектор на кут 90° за годинниковою стрілкою);

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad - \quad \text{модуль} \quad (\text{довжина} \quad \text{вектора})$$

комплексного числа \underline{A} (завжди додатній).

$\alpha = \arg \underline{A}$ – **аргумент (кут) комплексного числа** (рис. 7):

- для I квадранта комплексної площини дорівнює $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$;
- для II квадранта комплексної площини дорівнює $\alpha = 180^\circ - \arctg \frac{b}{a}$;

- для III квадранта комплексної площини дорівнює $\alpha = -(180^\circ - \arctg \frac{b}{a})$;
- для IV квадранта комплексної площини дорівнює $\alpha = -\arctg \frac{b}{a}$.

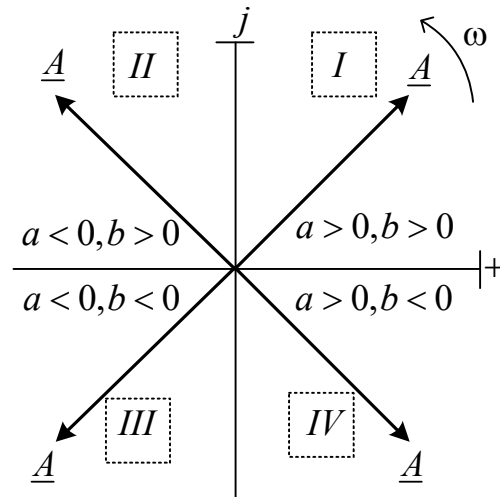


Рисунок 7 – розташування вектора \underline{A} у різних квадрантах комплексної площини

Для одиничного вектора $1 \cdot e^{j\alpha} = 1 \cdot \cos \alpha \pm j \cdot 1 \cdot \sin \alpha$ (формула Ейлера).

Комплексне число $\underline{A}^* = a - j \cdot b = A \cdot e^{-j\alpha}$ називається спряженим числу

$\underline{A} = a + j \cdot b = A \cdot e^{j\alpha}$ та відрізняється знаком аргументу (рис. 8).

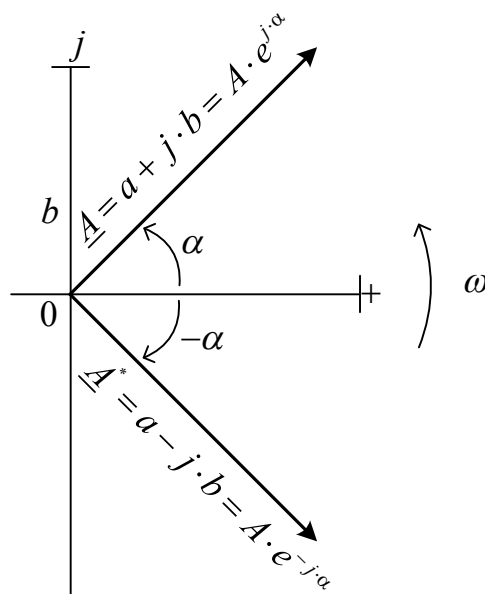


Рисунок 8 – Зображення спряженого вектора \underline{A}^*

Добуток комплексного числа на спряжене число дорівнює

$$\begin{aligned}\underline{A} \cdot \underline{A}^* &= (a + j \cdot b) \cdot (a - j \cdot b) = a^2 - \cancel{j \cdot a \cdot b} + \cancel{j \cdot a \cdot b} + b^2 = a^2 + b^2; \\ \underline{A} \cdot \underline{A}^* &= A \cdot e^{j \cdot \alpha} \cdot A \cdot e^{-j \cdot \alpha} = A^2.\end{aligned}\quad (9)$$

Представимо математичні операції із спряженим числом

$$\begin{aligned}\frac{\underline{A}}{\underline{A}^*} &= \frac{\cancel{A} \cdot e^{j \cdot \alpha}}{\cancel{A} \cdot e^{-j \cdot \alpha}} = e^{j \cdot 2 \cdot \alpha}; \\ \underline{A} - \underline{A}^* &= (a + j \cdot b) - (a - j \cdot b) = 2 \cdot j \cdot b; \\ \underline{A} + \underline{A}^* &= (a + j \cdot b) + (a - j \cdot b) = 2 \cdot a.\end{aligned}\quad (10)$$

Множення комплексного числа \underline{A} на оператор повороту $e^{j \cdot \varphi}$ обертає вектор у комплексній площині на кут φ : $\underline{A} \cdot e^{j \cdot \varphi} = A \cdot e^{j \cdot \alpha} \cdot e^{j \cdot \varphi} = A \cdot e^{j \cdot (\alpha + \varphi)}$.

Додавання та віднімання комплексних чисел:

$$\underline{A} + \underline{B} = (a \pm j \cdot b) + (c \pm j \cdot d).$$

Приклад.

$$\begin{aligned}4 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{4}} + 10 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{6}} &= \\ &= 4 \cdot \cos(-45^\circ) + j \cdot 4 \cdot \sin(-45^\circ) + 10 \cdot \cos(30^\circ) + j \cdot 10 \cdot \sin(30^\circ) = \\ &= 2.828 - j \cdot 2.828 + 8.66 + j \cdot 5 = 11.489 + j \cdot 2.172 = 11.692 \cdot e^{j \cdot 10.704^\circ}; \quad (11) \\ A &= \sqrt{11.489^2 + 2.172^2} = 11.692; \\ \alpha &= \arctg\left(\frac{2.172}{11.489}\right) = 10.704^\circ.\end{aligned}$$

Множення комплексних чисел

$$\begin{aligned}\underline{A} \cdot \underline{B} &= (a + j \cdot b) \cdot (c + j \cdot d) = a \cdot c + a \cdot j \cdot d + c \cdot j \cdot b + j \cdot b \cdot j \cdot d = \\ &= a \cdot c + j \cdot (a \cdot d + c \cdot b) - b \cdot d = A \cdot e^{j \cdot \alpha} \cdot B \cdot e^{j \cdot \beta} = A \cdot B \cdot e^{j \cdot (\alpha + \beta)};\end{aligned}$$

Приклад.

$$\begin{aligned}
 (-10 + j \cdot 8) \cdot (10 - j \cdot 8) &= -100 + j \cdot 80 + j \cdot 80 + 64 = -36 + j160 = 164 \cdot e^{j102.68^\circ}; \\
 A &= \sqrt{36^2 + 160^2} = 164; \\
 \alpha &= -\arctg\left(\frac{160}{36}\right) + 180^\circ = 102.68^\circ.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Ділення комплексних чисел

$$\begin{aligned}
 \frac{\underline{A}}{\underline{B}} &= \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}^*}{\underline{B} \cdot \underline{B}^*} = \frac{(a + j \cdot b) \cdot (c - j \cdot d)}{c^2 + d^2} = \\
 &= \frac{a \cdot c - j \cdot a \cdot d + j \cdot b \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + j \cdot (b \cdot c - a \cdot d)}{c^2 + d^2} = \\
 &= \frac{(a \cdot c + b \cdot d)}{c^2 + d^2} + j \cdot \frac{(b \cdot c - a \cdot d)}{c^2 + d^2}; \\
 \frac{\underline{A}}{\underline{B}} &= \frac{A \cdot e^{j \cdot \alpha}}{B \cdot e^{j \cdot \beta}} = \frac{A}{B} \cdot e^{j \cdot (\alpha - \beta)}.
 \end{aligned}$$

Приклад.

$$\begin{aligned}
 \frac{(4 + j \cdot 4)}{(-2 + j \cdot 5)} &= \frac{(4 + j \cdot 4) \cdot (-2 - j \cdot 5)}{(-2 + j \cdot 5) \cdot (-2 - j \cdot 5)} = \frac{-8 - j20 - j8 + 20}{4 + 25} = \\
 \frac{12}{29} - j \frac{28}{29} &= 0.414 - j0.966 = 1.05 \cdot e^{-j \cdot 66.801^\circ}; \\
 A &= \sqrt{0.414^2 + 0.966^2} = 1.05; \\
 \alpha &= -\arctg\left(\frac{0.966}{0.414}\right) = -66.801^\circ; \\
 \frac{5 \cdot e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}}}{(4 + j \cdot 3)} &= \frac{5 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}}{5 \cdot e^{j \cdot 36.87^\circ}} = e^{-j \cdot 156.87^\circ} = \cos(-156.87^\circ) + j \cdot \sin(-156.87^\circ) = \\
 &= -0.92 - j \cdot 0.393 = 1 \cdot e^{-j \cdot 156.87^\circ}; \\
 A &= \sqrt{0.92^2 + 0.393^2} = 1; \\
 \alpha &= -\left(180^\circ - \arctg \frac{0.393}{0.92}\right) = -156.87^\circ.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Піднесення до ступеня

$$\underline{A}^n = (A \cdot e^{j \cdot \alpha})^n = A^n \cdot e^{j \cdot n \cdot \alpha} = A^n (\cos n \cdot \alpha + j \cdot A \cdot \sin n \cdot \alpha). \quad (14)$$

Добування кореня

$$\sqrt[n]{\underline{A}} = \sqrt[n]{A \cdot e^{j \cdot \alpha}} = \sqrt[n]{A} \cdot e^{j \frac{\alpha + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}}, \quad (15)$$

де k – ціле число.

Множення комплексу на $\pm j$ відповідає його повороту на $\pm 90^\circ$:

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot (\pm j) &= A e^{j \cdot \alpha} \cdot e^{j \pm 90^\circ} = A \cdot e^{j \cdot (\alpha \pm 90^\circ)}; \\ j \cdot j &= j^2 = (\sqrt{-1})^2 = e^{j 180^\circ} = -1; \\ j^3 &= j^2 \cdot j = -1 \cdot j = -j = e^{j - 90^\circ}; \\ j^4 &= j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1; \\ \frac{1}{j} &= \frac{1 \cdot j}{j \cdot j} = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{(-1)} = -j. \end{aligned} \quad (16)$$

Геометрично додавання та віднімання комплексних чисел зводиться до додавання та віднімання відповідних векторів (рис. 9).

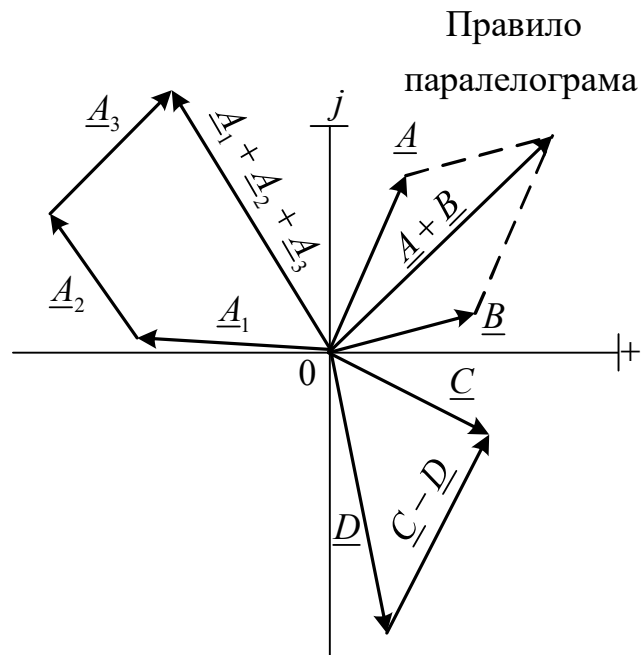


Рисунок 9 – Геометричне додавання та віднімання комплексних чисел

3 Представлення синусоїдних величин комплексними числами

Проекція вектора \underline{V}_m , що обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω , на уявну вісь числової площини дає миттєве значення синусоїдної величини v (рис .10). Цей вектор, який обертається, записується у вигляді $V_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \alpha)}$. Кут α показує положення вектора \underline{V}_m у початковий момент часу $V_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \alpha)} \Big|_{t=0} = V_m \cdot e^{j \cdot (\alpha)}$.

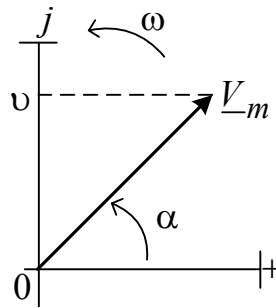


Рисунок 10 – Проекція вектора \underline{V}_m

Числова величина уявної частини виразу $V_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \alpha)}$ дає миттєве значення величини, що змінюється за синусоїдним законом:

$$v = V_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) = \text{Im} \left[V_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \alpha)} \right] = \text{Im} \left[\underline{V}_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t)} \right]. \quad (17)$$

Символ уявної частини Im іноді не зображують та записують як $v \Leftrightarrow \underline{V}_m \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$, де \Leftrightarrow - знак відповідності. Комплексне число $\underline{V}_m = V_m \cdot e^{j \cdot \alpha}$ називають комплексною амплітудою. Комплексне діюче число $\underline{V} = V \cdot e^{j \cdot \alpha}$. Модуль комплексного діючого значення V співпадає з діючим значенням синусоїдної величини, а аргумент співпадає з її початковою фазою. Комплексні амплітуда та діюче значення пов'язані рівністю $\underline{V} = \frac{\underline{V}_m}{\sqrt{2}}$.

Запишемо синусоїдну функцію струму $i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i)$ (рис. 11), аргумент якої $(\omega \cdot t + \psi_i)$ лінійно зростає у часі, комплексним числом [4]

$$I_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \psi_i)} = I_m \cdot e^{j \cdot \psi_i} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = \underline{I}_m \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}, \quad (18)$$

де $\underline{I}_m = I_m \cdot e^{j \cdot \psi_i}$ – комплексна амплітуда (рис. 11), А;

I_m – модуль комплексної амплітуди (реальна амплітуда синусоїдної функції), А;

ψ_i – аргумент (початкова фаза), градус;

$j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

$e^{j \cdot \omega \cdot t} = \cos(\omega \cdot t) + j \sin(\omega \cdot t)$ – обертовий вектор (формула Фур'є).

$$e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + j = j, \quad \boxed{e^{\pm j \cdot 90^\circ} = \pm j}.$$

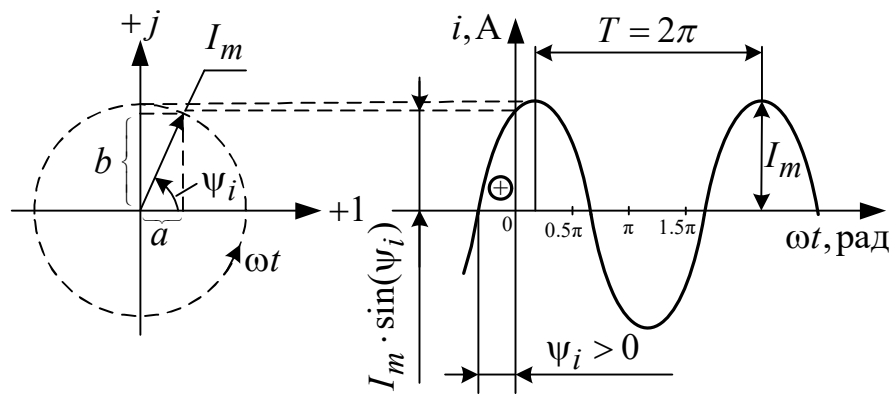


Рисунок 11 – Графік обертання вектора струму \underline{I}_m на комплексній площині та крива синусоїдної функції струму $i(t)$

Перейдемо від радіус-вектора струму до комплексного числа у різних формах запису, за рахунок проєкцій вектора на осі комплексної площини у початковий момент часу $t = 0$ ($e^{j \cdot \omega \cdot t} \Big|_{t=0} = 1$)

$$\underline{I}_m = \underbrace{a + j \cdot b}_{\text{алгебраїчна}} = \underbrace{I_m \cdot \cos(\psi_i) + j \cdot I_m \cdot \sin(\psi_i)}_{\text{тригонометрична}} = \underbrace{I_m \cdot e^{j \cdot \psi_i}}_{\text{показникова}} = \underbrace{I_m \angle \psi_i}_{\text{полярна}}; \quad (19)$$

для діючого значення $\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \psi_i$.

Значення модуля комплексної амплітуди струму I_m розраховується за теоремою Піфагора для прямокутного трикутника

$$I_m = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (20)$$

Початкова фаза ψ_i визначається через аргумент \arg (рис. 7)

$$\psi_i = \arg\left(\frac{b}{a}\right) = \begin{cases} a > 0, b > 0 & \text{тоді } (\arctg \frac{b}{a}); \\ a < 0, b > 0 & \text{тоді } (180^\circ - \arctg \frac{b}{a}); \\ a < 0, b < 0 & \text{тоді } -(180^\circ - \arctg \frac{b}{a}); \\ a > 0, b < 0 & \text{тоді } (-\arctg \frac{b}{a}). \end{cases} \quad (21)$$

Метод розрахунку електричних кіл, при якому синусоїдні величини (*реальні величини*) замінені комплексами (*зображеннями*) називається *комплексним* або *символічним* методом [4, 12].

Покажемо перехід від миттєвих значень синусоїдних функцій до комплексних амплітуд

$$u = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ (В)} \rightleftharpoons \underline{U}_m = 220\sqrt{2} e^{j30^\circ} \text{ (В)}, \quad (22)$$

комплексне діюче значення напруги

$$\boxed{\underline{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = 220 e^{j30^\circ} \text{ (В)}}.$$

4 Розрахунок кола синусоїдного струму символьним методом

Параметри кола синусоїдного струму символьним методом розраховують, як кола постійного струму, що мають аналогічну конфігурацію. Але на відміну від кола постійного струму замість *діючих* величин *використовуються відповідні їм комплекси*. Це відноситься до струмів, напруг, опорів та провідностей [8].

На основі вихідних даних записують комплекси опорів \underline{Z}_k усіх віток та позначають на ньому додатні напрямки комплексних струмів віток

$$\underline{Z}_k = R_k + j(X_{Lk} - X_{Ck}) = R_k + jX_k. \quad (22)$$

Розрахунок *простого* кола (з однією ЕРС) виконують перетворенням схеми, рухаючись від найбільш віддаленої частини схеми до її вхідних затискачів, розрахувавши, таким чином, комплексний вхідний опір.

При послідовному з'єднанні ділянок кола комплексний еквівалентний опір дорівнює сумі комплексних опорів окремих ділянок

$$\underline{Z} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k. \quad (23)$$

Під час паралельного з'єднання віток кола комплексна еквівалентна провідність дорівнює сумі комплексних провідностей віток

$$\underline{Y} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k. \quad (24)$$

Для паралельного з'єднання двох опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 еквівалентний комплексний опір дорівнює

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (25)$$

Еквівалентний комплексний опір для трьох паралельних з'єднаних опорів \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 та \underline{Z}_3 дорівнює

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}. \quad (26)$$

Розділивши комплекс діючого значення вхідної напруги на комплекс вхідного опору, знайдемо комплекс діючого вхідного струму

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e}. \quad (27)$$

Миттєве значення струму визначають як уявну частину комплексу миттєвого струму

$$i = \text{Im} \left[\sqrt{2} \cdot \underline{I} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \right], \quad A \quad (28)$$

Потім, рухаючись за напрямком від ЕРС кола, визначають комплекси та миттєві значення струмів окремих віток. Комплексні струми, які проходять у кожній з двох паралельних віток, визначають через комплексний струм, який проходить у нерозгалуженій частині кола \underline{I} , та комплексні опори віток \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 за формулами

$$\underline{I}_1 = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (29)$$

Приклад 1. Розрахунок електричного кола синусоїдного струму комплексним методом наведено у Додатку А (пункт 1).

Приклад 2. Електричне коло рис. 12 живиться від джерела синусоїдної напруги $u(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega \cdot t + \psi_u) = 100\sqrt{2} \sin(\omega \cdot t - 90^\circ)$, В. Параметри кола: $R=20$ (Ом), $L=200$ мГн, $C=22$ (мкФ) та кутова частота $\omega=314.159$ (рад/с).

Визначити: діючі значення струму і напруг на елементах; кут зсуву фаз

між струмом та напругою на вході кола; миттєві значення струму і напруг.

Переконайтесь, що II закон Кірхгофа не виконується для діючих значень.

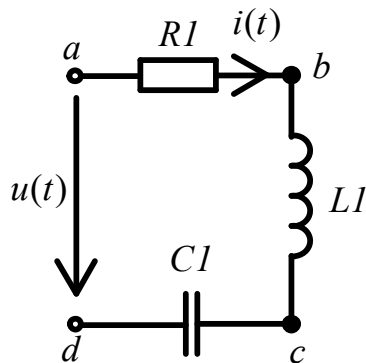


Рисунок 12 – Електричне схема

Знайдемо індуктивний і ємнісний опори:

$$\begin{aligned} X_L &= \omega \cdot L = 314.159 \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 62.832 (\text{Ом}); \\ X_C &= \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{314.159 \cdot 22 \cdot 10^{-6}} = 144.686 (\text{Ом}). \end{aligned} \quad (30)$$

Розрахуємо повний комплексний опір кола \underline{Z}_e та кут зсуву фаз між струмом та напругою живлення φ

$$\begin{aligned} \underline{Z}_e &= R + j \cdot X_L - j \cdot X_C = 20 + j \cdot 62.832 - j \cdot 144.686 = \\ &= 20 - j \cdot 81.885 = 84.263 \angle -76.27^\circ (\text{Ом}), \boxed{\varphi = -76.27^\circ}. \end{aligned} \quad (31)$$

За законом Ома знайдемо комплексну амплітуду, діюче та миттєве значення струму

$$\begin{aligned} \underline{I}_m &= \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_e} = \frac{100\sqrt{2}e^{j \cdot (-90^\circ)}}{84.263e^{j \cdot (-76.27^\circ)}} = 1.678 \angle -13.73^\circ (\text{А}); \\ I &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1.678}{\sqrt{2}} = 1.187 (\text{А}); \\ i(t) &= 1.187\sqrt{2} \sin(314.159 \cdot t - 13.73^\circ) \text{ А}. \end{aligned} \quad (32)$$

Визначимо напруги на елементах електричного кола та їх миттєві значення

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{Cm} &= \underline{I}_m \cdot (-j \cdot X_C) = 1.678 \angle -13.73^\circ \cdot (-j \cdot 144.686) = \\
 &= 242.833 \angle -103.73^\circ (\text{В}); \\
 u_C(t) &= 171.709\sqrt{2} \sin(314.159 \cdot t - 103.73^\circ) \text{В}; \\
 \underline{U}_{Lm} &= \underline{I}_m \cdot j \cdot X_L = 1.678 \angle -13.73^\circ \cdot j \cdot 62.832 = 105.453 \angle 76.27^\circ (\text{В}); \\
 u_L(t) &= 74.567\sqrt{2} \sin(314.127 \cdot t + 76.27^\circ) \text{В}; \\
 \underline{U}_{Rm} &= \underline{I}_m \cdot R = 1.678 \angle -13.73^\circ \cdot 20 = 33.567 \angle -13.73^\circ (\text{В}); \\
 u_R(t) &= 23.735\sqrt{2} \sin(314.127 \cdot t - 13.73^\circ) \text{В}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Розрахуємо діючі значення напруг

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 100 (\text{В}); \\
 U_R &= \frac{U_{Rm}}{\sqrt{2}} = \frac{23.735\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 23.735 (\text{В}); \\
 U_L &= \frac{U_{Lm}}{\sqrt{2}} = \frac{74.567\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 74.567 (\text{В}); \\
 U_C &= \frac{U_{Cm}}{\sqrt{2}} = \frac{171.709\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 171.709 (\text{В}).
 \end{aligned} \tag{34}$$

Перевіримо, що II закон Кірхгофа не виконується для діючих значень

$$\begin{aligned}
 U &\neq U_R + U_L + U_C; \\
 100 (\text{В}) &\neq 23.735 + 74.567 + 171.709 = 270.011 (\text{В}).
 \end{aligned} \tag{35}$$

II закон Кірхгофа виконується для комплексних значень

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C. \tag{36}$$

Для доказу цього твердження, наведена топографічна діаграма комплексних амплітуд напруг електричного кола (рис. 13).

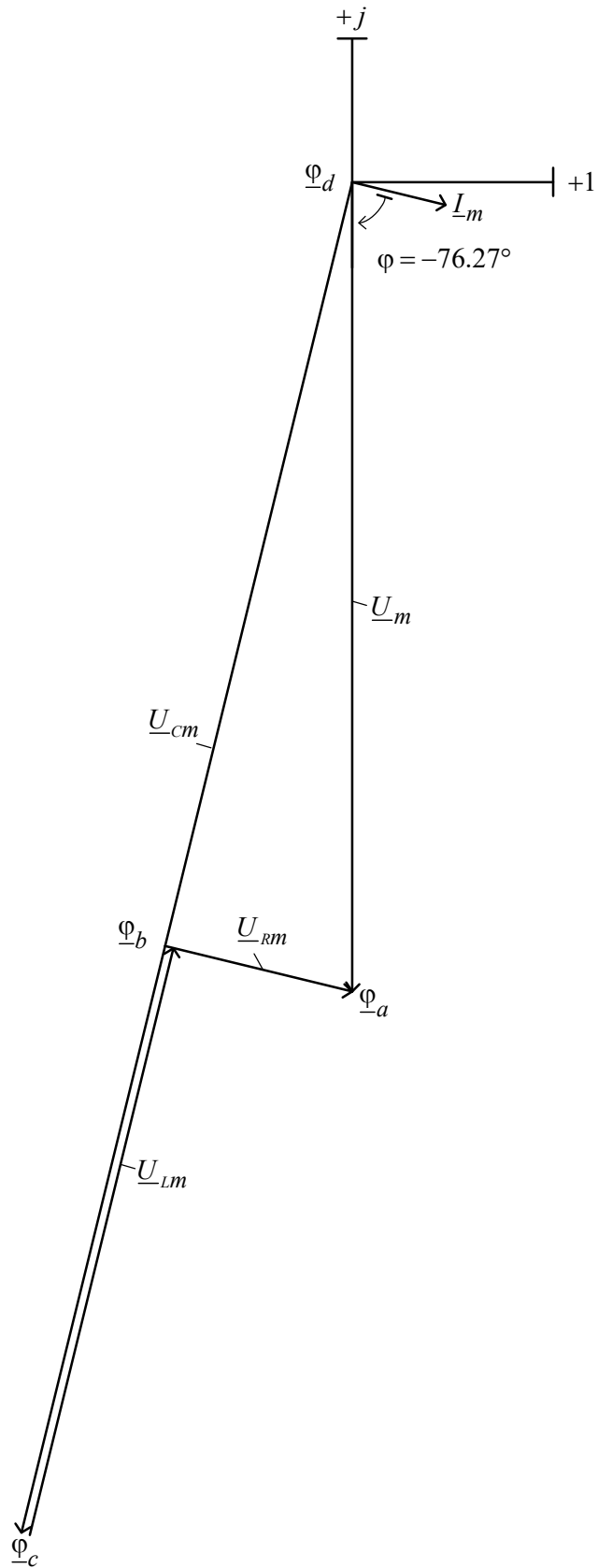


Рисунок 13 – Топографічна діаграмі комплексних амплітуд напруг
електричного кола

Приклад 3. В електричному колі (рис. 14) струм $i(t) = 5\sqrt{2} \sin(314.159 \cdot t)$ А, $R=40$ (Ом), $L=0.064$ (Гн), $C=53$ (мкФ). Визначити діючі значення вхідної напруги та струмів у паралельних вітках; миттєві значення струмів та напруг.

Переконайтесь, що I закон Кірхгофа не використовується для діючих значень струмів.

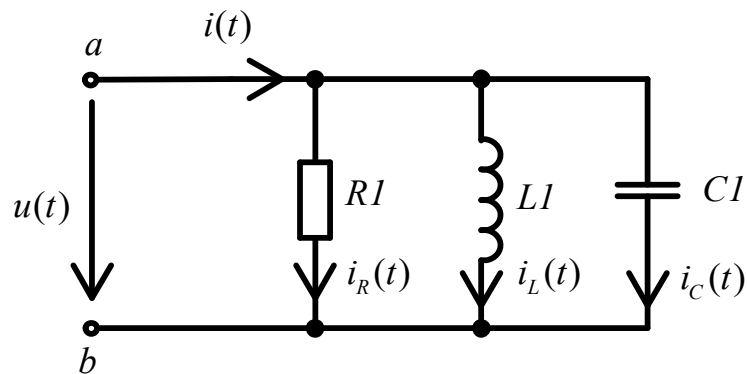


Рисунок 14 – Електричне схема

Визначимо провідність віток електричного кола:

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{1}{R} = \frac{1}{40} = 0.025 (\text{См}); \\
 B_L &= \frac{1}{\omega \cdot L} = \frac{1}{314.159 \cdot 0.064} = 0.05 (\text{См}); \\
 B_C &= \omega \cdot C = 314.159 \cdot 53 \cdot 10^{-6} = 0.017 (\text{См}).
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

Повна комплексна провідність кола \underline{Y}_e та кут зсуву фаз між загальним струмом та напругою φ дорівнюють:

$$\begin{aligned}
 \underline{Y}_e &= G + j \cdot B_C - j \cdot B_L = 0.025 + j \cdot 0.017 - j \cdot 0.05 = \\
 &= 0.025 - j \cdot 0.033 = 0.041 \angle -52.925^\circ (\text{См}); \\
 \boxed{\varphi = 52.92^\circ}.
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Визначаємо комплексну амплітуду напруги на елементах електричного

кола:

$$\underline{U}_m = \frac{\underline{I}_m}{\underline{Y}_e} = \frac{5\sqrt{2}}{0.041 \angle -52.925^\circ} = 120.573\sqrt{2} \angle 52.925^\circ (\text{В}). \quad (39)$$

Визначаємо комплекси та діючі значення струмів у вітках електричного кола:

$$\underline{I}_{Rm} = \dot{U}_m \cdot G = 120.573\sqrt{2} \angle 52.925^\circ \cdot 0.025 = 3.014\sqrt{2} \angle 52.925^\circ (\text{А});$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{Lm} &= \dot{U}_m \cdot (-j \cdot B_L) = 120.573\sqrt{2} \angle 52.925^\circ \cdot (-j \cdot 0.05) = \\ &= 5.997\sqrt{2} \angle -37.075^\circ (\text{А}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{Cm} &= \dot{U}_m \cdot (j \cdot B_C) = 120.573\sqrt{2} \angle 52.925^\circ \cdot (j \cdot 0.017) = \\ &= 2.008\sqrt{2} \angle 142.925^\circ (\text{А}); \end{aligned}$$

$$I_R = \frac{3.014\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3.014 (\text{А});$$

$$I_L = \frac{5.997\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5.997 (\text{А}); \quad (40)$$

$$I_C = \frac{2.008\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2.008 (\text{А}).$$

Миттєві значення напруги і струмів електричної схеми:

$$\begin{aligned} u(t) &= 120.573\sqrt{2} \sin(314.159 \cdot t + 52.925^\circ) (\text{В}). \\ i_R(t) &= 3.014\sqrt{2} \sin(314.159 \cdot t + 52.925^\circ) (\text{А}), \\ i_L(t) &= 5.997\sqrt{2} \sin(314.159 \cdot t - 37.075^\circ) (\text{А}), \\ i_C(t) &= 2.008\sqrt{2} \sin(314.159 \cdot t + 142.925^\circ) (\text{А}). \end{aligned} \quad (41)$$

Перевіримо на достовірність I закон Кірхгофа для діючих значень струмів

$$I \neq I_R + I_L + I_C, \quad (42)$$

$$5(\text{A}) \neq 3.014 + 5.997 + 2.008 = 11.019(\text{A}).$$

Перший закон Кірхгофа не виконується для діючих значень струмів.

І закон Кірхгофа виконується для комплексних значень

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C. \quad (43)$$

Для доказу цього твердження, наведена векторна діаграма комплексних амплітуд струмів електричного кола (рис. 15).

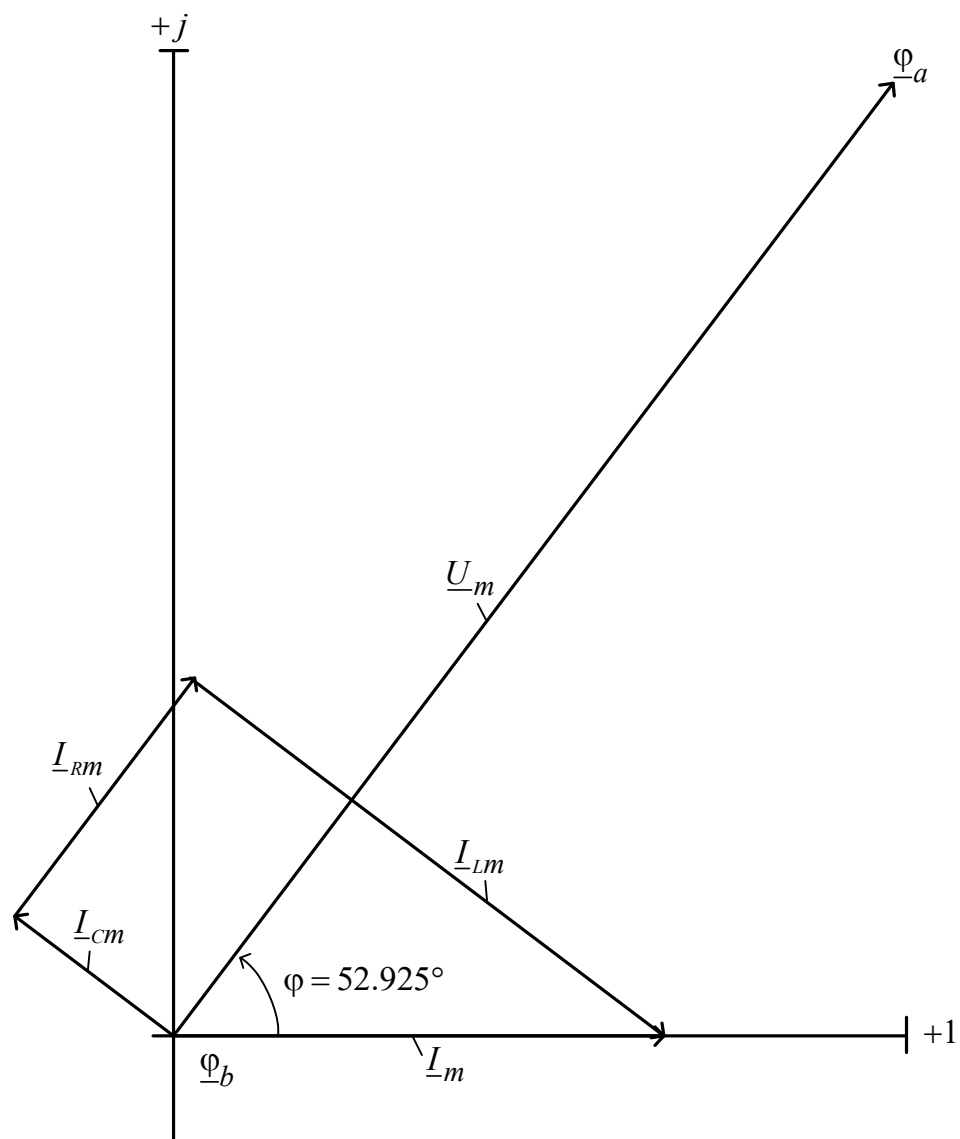


Рисунок 15 – Векторна діаграма комплексних амплітуд струмів електричного кола

5 Баланс потужностей електричного кола

Комплексна повна потужність \underline{S} (ВА)

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) + j \cdot U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = P + j \cdot Q, \quad (44)$$

де $\varphi = \psi_U - \psi_I$ – кут зсуву фаз векторами напруги та струму, градус.

ψ_U – початкова фаза синусоїдної ЕРС, градус;

ψ_I – початкова фаза синусоїдного струму, градус;

P – активна потужність, Вт;

Q – реактивна потужність, ВАр;

У колі синусоїдного струму сума комплексів потужностей джерел енергії дорівнює сумі комплексів потужностей усіх пасивних двополюсників цього кола (споживачів):

$$\begin{aligned} \sum \underline{S}_{\text{дж}} &= \sum (\underline{I}_k \cdot \underline{Z}_k), \quad k = \overline{1, n}; \quad n \in \mathbb{N}, \\ P_{\text{дж}} + j \cdot Q_{\text{дж}} &= P_{\text{сп}} + j \cdot Q_{\text{сп}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Таким чином, баланс комплексних потужностей зводиться до балансу активних $\sum P_{\text{дж}} = \sum P_{\text{сп}}$ та реактивних $\sum Q_{\text{дж}} = \sum Q_{\text{сп}}$ потужностей електричного кола.

Для електричної схеми з одним джерелом енергії її вхідна потужність дорівнює **добутку комплексу діючого значення ЕРС \underline{E} на спряжений комплекс діючого значення вхідного струму \underline{I}^*** . Активна потужність джерела повинна дорівнювати *арифметичній сумі активних потужностей теплових втрат* в активних опорах електричного кола. Реактивна потужність джерела повинна дорівнювати **алгебраїчній сумі реактивних потужностей** усіх віток електричного кола:

$$\begin{aligned} P_{\text{дж}} &= \operatorname{Re}[\underline{S}_{\text{дж}}] = \operatorname{Re}[\underline{E} \cdot \underline{I}^*] = E \cdot I \cdot \cos(\psi_E - \psi_I) = \Sigma(I_k^2 \cdot R_k); \\ Q_{\text{дж}} &= \operatorname{Im}[\underline{S}_{\text{дж}}] = \operatorname{Im}[\underline{E} \cdot \underline{I}^*] = E \cdot I \cdot \sin(\psi_E - \psi_I) = \Sigma(I_k^2 \cdot X_k), \end{aligned} \quad (46)$$

де I_k^2 – **квадрат діючого значення струму** відповідної вітки електричного кола, А;

I – діюче значення вхідного струму, А;

E – діюче значення ЕРС, В;

ψ_E – початкова фаза синусоїдної ЕРС, градус;

R – активний опір, Ом;

X – реактивний опір, Ом.

Запишемо рівняння вхідної потужності для джерела струму:

$$\begin{aligned} P_{\text{дж}} &= \operatorname{Re}[\underline{S}_{\text{дж}}] = \operatorname{Re}[\underline{U}_J \cdot \underline{J}^*] = \Sigma(I_k^2 \cdot R_k); \\ Q_{\text{дж}} &= \operatorname{Im}[\underline{S}_{\text{дж}}] = \operatorname{Im}[\underline{U}_J \cdot \underline{J}^*] = \Sigma(I_k^2 \cdot X_k), \end{aligned} \quad (47)$$

де \underline{U}_J – комплексна напруга на затискачах джерела струму, В;

\underline{J}^* – комплекс струму, що спряжений до комплексу джерела струму \underline{J} , А;

Приклад 4. Розрахунок балансу потужностей електричного кола синусоїдного струму наведено у Додатку А (пункт 1.2).

6 Топографічні діаграми напруг та векторна діаграма струмів

Для кращого засвоєння теоретичного матеріалу, який пов'язаний з побудовою векторних діаграм, розглянемо приклад, коли потенціали умовних точок «А» та «В» представлені у вигляді комплексних чисел:

$\underline{\varphi}_A = \varphi_A \cdot e^{j \cdot \psi_A} (B)$ та $\underline{\varphi}_B = \varphi_B \cdot e^{j \cdot \psi_B} (B)$. Тоді напруга $\underline{U}_{AB} = \underline{\varphi}_A - \underline{\varphi}_B$ (**різниця комплексних потенціалів**). Покажемо векторну діаграму для комплексної напруги \underline{U}_{AB} на рис. 16.

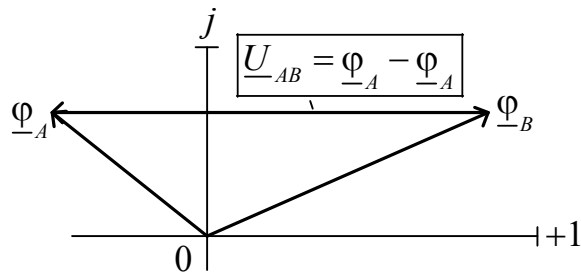


Рисунок 16 – Векторна діаграма напруги \underline{U}_{AB}

Кінцем вектору напруги \underline{U}_{AB} є точка «A», а початком - точка «B», тому що вектор напруги \underline{U}_{AB} це є різниця векторів $\underline{\varphi}_A$ та $\underline{\varphi}_B$.

Потенціал кожної точки кола змінного струму визначається комплексною величиною $\underline{\varphi}_a, \underline{\varphi}_b$, тому розподіл потенціалів у електричному колі для наочності представляють *на комплексній площині*, порівнюючи точки електричної схеми з визначеними точками на площині. При такій побудові різницю потенціалів (напругу) між двома довільними точками можна представити вектором, який з'єднує ці точки на площині [8].

Потенціальна діаграма, при якій кожній точці кола відповідає відповідна точка на комплексній площині, зветься **топографічною**.

При побудові топографічної діаграми потенціал однієї з точок можна прийняти нуль (опорний вузол). На топографічній діаграмі цю точку розміщують на початку координат. Положення інших точок електричної схеми визначаються параметрами кола, значеннями ЕРС та струмів віток.

Розглянемо методику побудови топографічної діаграми напруг для електричної схеми, що представлена на рис. 17. Направимо довільно вектор струму \underline{I}_1 на комплексній площині, яка зображена на рис. 18. Прийmemo за опорну точку в електричному колі точку f , потенціал якої дорівнює нулю ($\underline{\varphi}_f = 0$) та визначимо потенціали інших точок.

Будемо обходити електричне коло, починаючи від точки f на зустріч додатному напрямку струму. Потенціал точки e більше потенціалу точки f

на значення напруги на резисторі R_3 :

$$\underline{\varphi}_f = 0;$$

$$\underline{U}_{ef} = \underline{\varphi}_e - \underline{\varphi}_f = \underline{\varphi}_e - 0 = \underline{I} \cdot R_3;$$

$$\underline{\varphi}_e = \underline{I} \cdot R_3 = \underline{U}_{ef};$$

$$\boxed{\underline{\varphi}_e = \underline{\varphi}_f + \underline{I} \cdot R_3}.$$

(48)

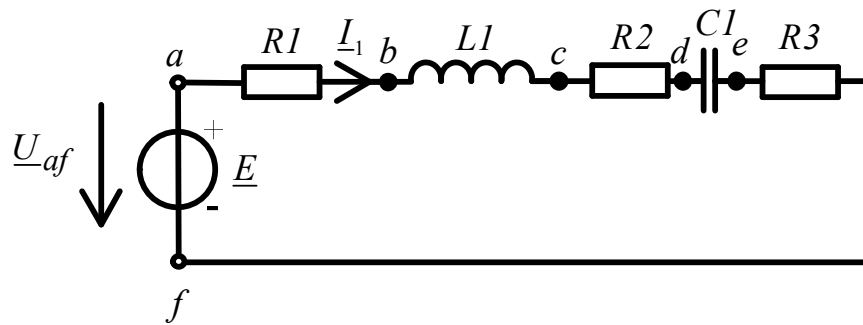


Рисунок 17 – Електричне схема

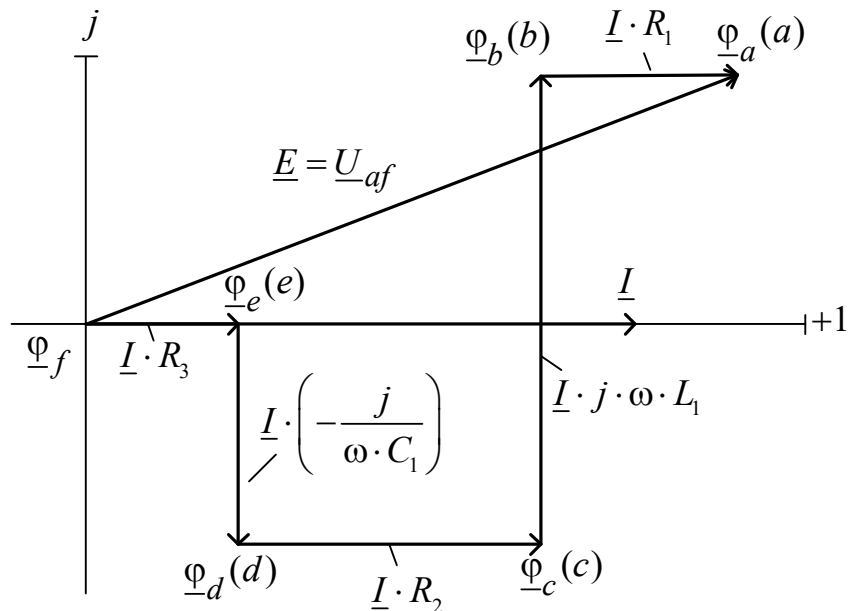


Рисунок 18 – Векторна діаграма напруг

Враховуючи, що $\underline{\varphi}_f = 0$, потенціал $\underline{\varphi}_e$ зображуємо вектором \underline{U}_{ef} , що дорівнює добутку $\underline{I} \cdot R_3$. Кінець цього вектора позначимо літерою e . Модуль потенціалу $\underline{\varphi}_d$ більше модуля потенціалу у точки e за рахунок напруги на конденсаторі C_1 .

Комплекс потенціалу $\underline{\varphi}_d$ дорівнює:

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_d &= \underline{\varphi}_e + \underline{I} \cdot \left(-\frac{j}{\omega \cdot C_1} \right) = \underline{\varphi}_e + \underline{I} \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1}; \\ \underline{\varphi}_d &= \underline{\varphi}_e + \underline{U}_{de}.\end{aligned}\tag{49}$$

Відкладаємо від кінця вектора $\underline{\varphi}_e$ вектор напруги $\underline{U}_{de} = \underline{I} \cdot \left(-\frac{j}{\omega \cdot C_1} \right)$.

Кінець вектора \underline{U}_{de} позначимо літерою d .

Аналогічно знаходимо потенціал точки c :

$$\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_d + \underline{I} \cdot R_2.\tag{50}$$

З кінця вектора \underline{U}_{de} проводимо вектор $\underline{U}_{cd} = \underline{I} \cdot R_2$. Кінець вектора \underline{U}_{cd} позначаємо літерою c . Від кінця вектора \underline{U}_{cd} відкладаємо вектор $\underline{U}_{bc} = \underline{I} \cdot j \cdot \omega \cdot L_1$. Кінець вектора \underline{U}_{bc} позначаємо літерою b . Від кінця вектора \underline{U}_{bc} відкладаємо вектор $\underline{U}_{ab} = \underline{I} \cdot R_1$ та отримуємо останню точку a топографічної діаграми, яка визначає потенціал $\underline{\varphi}_a$ або напругу \underline{U}_{af} :

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_a &= \underline{\varphi}_b + \underline{I} \cdot R_1; \\ \underline{\varphi}_a &= \underline{\varphi}_f + \underline{E} = 0 + \underline{E} = \underline{E}; \\ \underline{U}_{af} &= \underline{\varphi}_a - \underline{\varphi}_f = \underline{\varphi}_a - 0 = \underline{\varphi}_a;\end{aligned}\tag{51}$$

$$\boxed{\underline{\varphi}_a = \underline{E} = \underline{U}_{af}}.$$

Необхідно звернути увагу на напрямок векторів напруги на топографічних діаграмах.

Вектори напруг направлені відносно точок топографічної діаграми протилежно позитивним напрямкам напруг відносно відповідних точок схеми. Наприклад, вектор напруги \underline{U}_{cd} (позитивний напрямок на схемі від c до d) на топографічній діаграмі направлений від точки d до точки c).

Вектори ЕРС направлені відносно точок топографічної діаграми однаково з позитивними напрямками ЕРС відносно відповідних точок схеми. Наприклад, вектор ЕРС \underline{E} (позитивний напрямок на схемі від точки f до точки a) на топографічній діаграмі направлений також від точки f до точки a .

Для розгладженого електричного кола топографічну діаграму напруг рекомендують будувати разом з векторною діаграмою струмів. Це дозволяє отримати інформацію про режим роботи електричної схеми: за діаграмою можна визначити напругу між будь-якими точками електричного кола, струм будь-якої вітки, кут зсуву фаз між будь-якими напругами та струмами електричної схеми.

Для побудови векторної діаграми струмів необхідно записати рівняння за першим законом Кірхгофа для потенціальних вузлів електричного кола. З початку координат відкласти вектор струму у визначеному масштабі для найбільш віддаленої від входу вітки електричного кола, потім від її кінця відкласти наступний вектор струму у відповідності до рівнянь за I законом Кірхгофа для відповідного вузла і т. д.

Приклад 4. Побудова суміщеної векторної діаграма струмів та топографічної векторної діаграми напруг представлено у Додатку А (пункт 1.3).

7 Резонансні режими в електричному колі

В електричних колах синусоїдного струму, що мають послідовно з'єднані котушки індуктивності та конденсатори, можливий резонанс напруг при умові, що вхідний реактивний опір дорівнює нулю $X = X_L - X_C = 0$. В електричних колах, які складаються з паралельно з'єднаних котушки індуктивності та конденсатора, можливий резонанс струмів при умові, що вхідна реактивна провідність дорівнює нулю $B = B_L - B_C = 0$.

При аналізі резонансних режимів необхідно враховувати, що наявність реактивних елементів на ділянці електричного кола, де має місце резонанс, *вхідні струм та напруга співпадають за фазою*. Це означає, що *вхідний опір* резонансної ділянки буде мати *активний характер*, а уявна частина комплексу вхідного опору (вхідної провідності) буде дорівнювати нулю.

Будь-яка з наведених умов може використовуватись для визначення параметрів, при яких має місце резонанс у електричному колі або на ділянці цього кола.

На рис. 19 наведено електричне коло та векторна діаграма напруг. Графіки миттєвих значень напруг, струму та потужностей у стані резонансу напруг наведені на рис 20. Параметри елементів послідовного коливального контуру є наступними: $R=22$ (Ом), $L=0.1$ (Гн), $C=0.01$ (мкФ), $u(t) = 220\sqrt{2} \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t)$ (В).

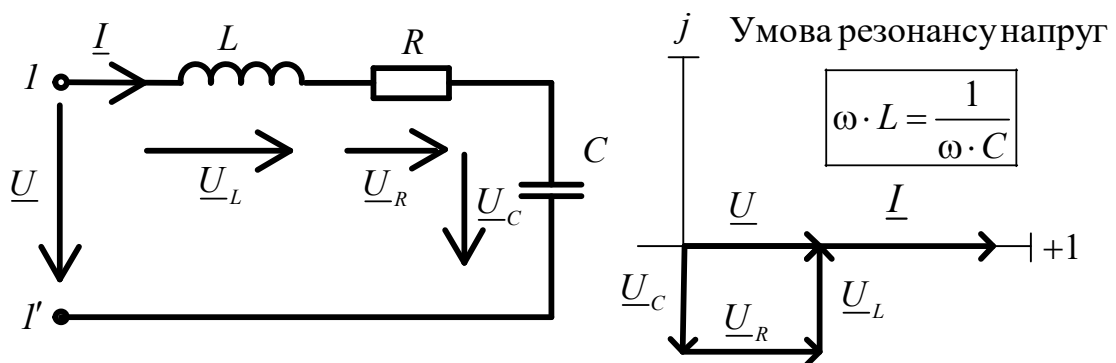


Рисунок 19 – Електричне коло та векторна діаграма напруг

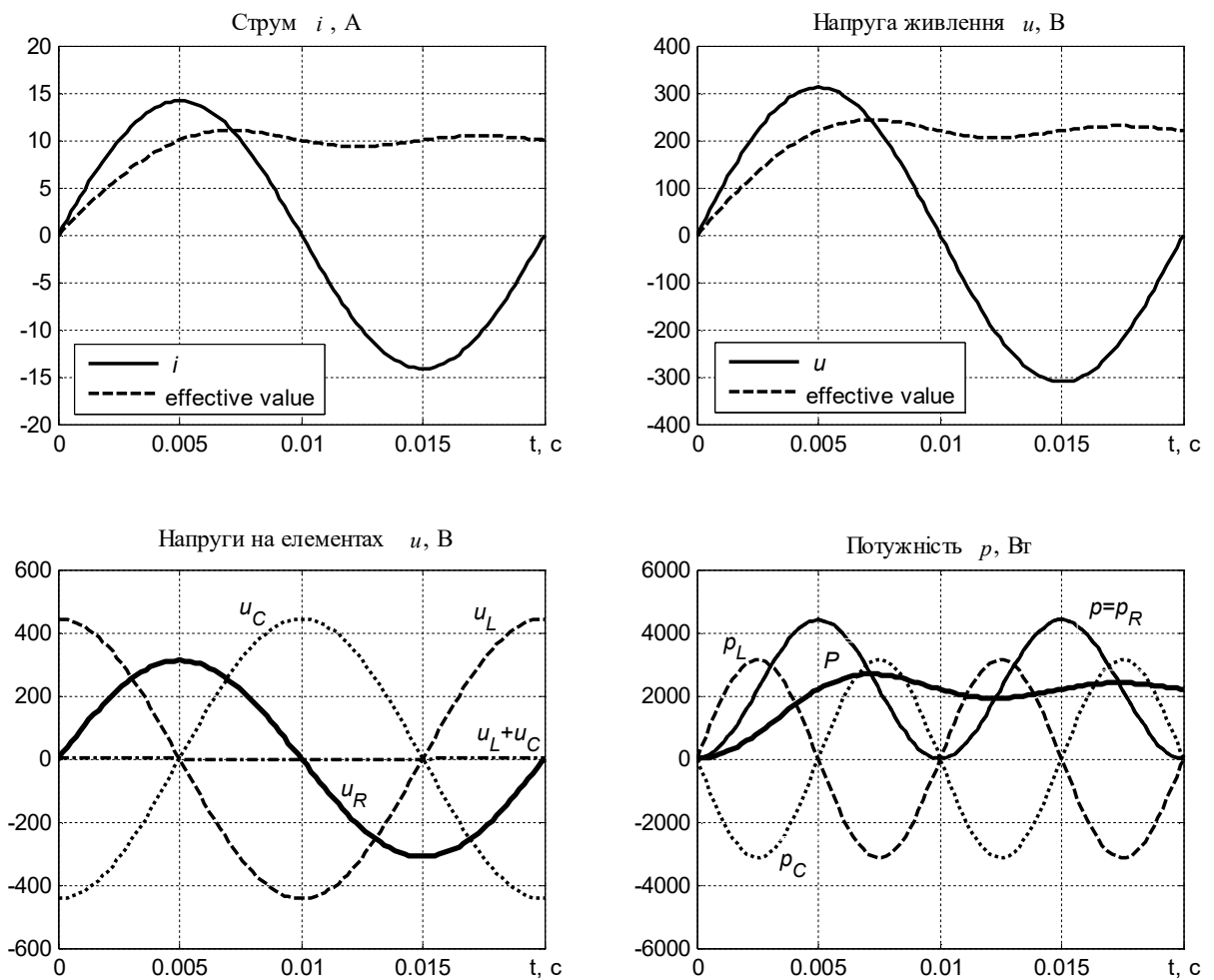


Рисунок 20 – Миттєві значення потужностей, напруг, струмів у стані резонансу напруг

На рис. 21 представлено електричне коло та векторна діаграма струмів. Графіки миттєвих значень струмів, напруги та потужностей у стані резонансі струмів зображені на рис. 22. Параметри елементів схеми є наступними: $R=50$ (Ом), $L=0.1$ (Гн), $C=0.01013$ (мкФ), $u(t) = 220\sqrt{2} \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t)$ (В).

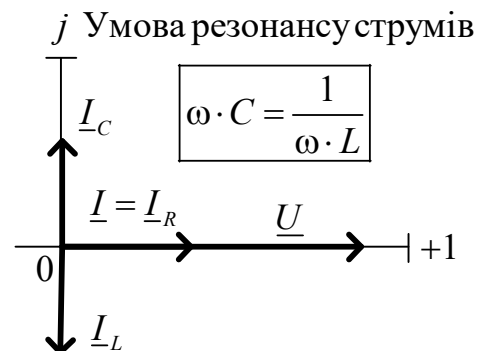
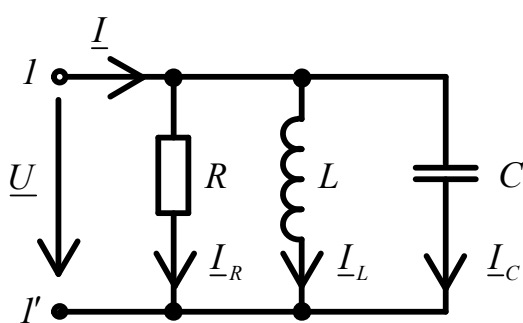


Рисунок 21 – Електричне коло та векторна діаграма струмів

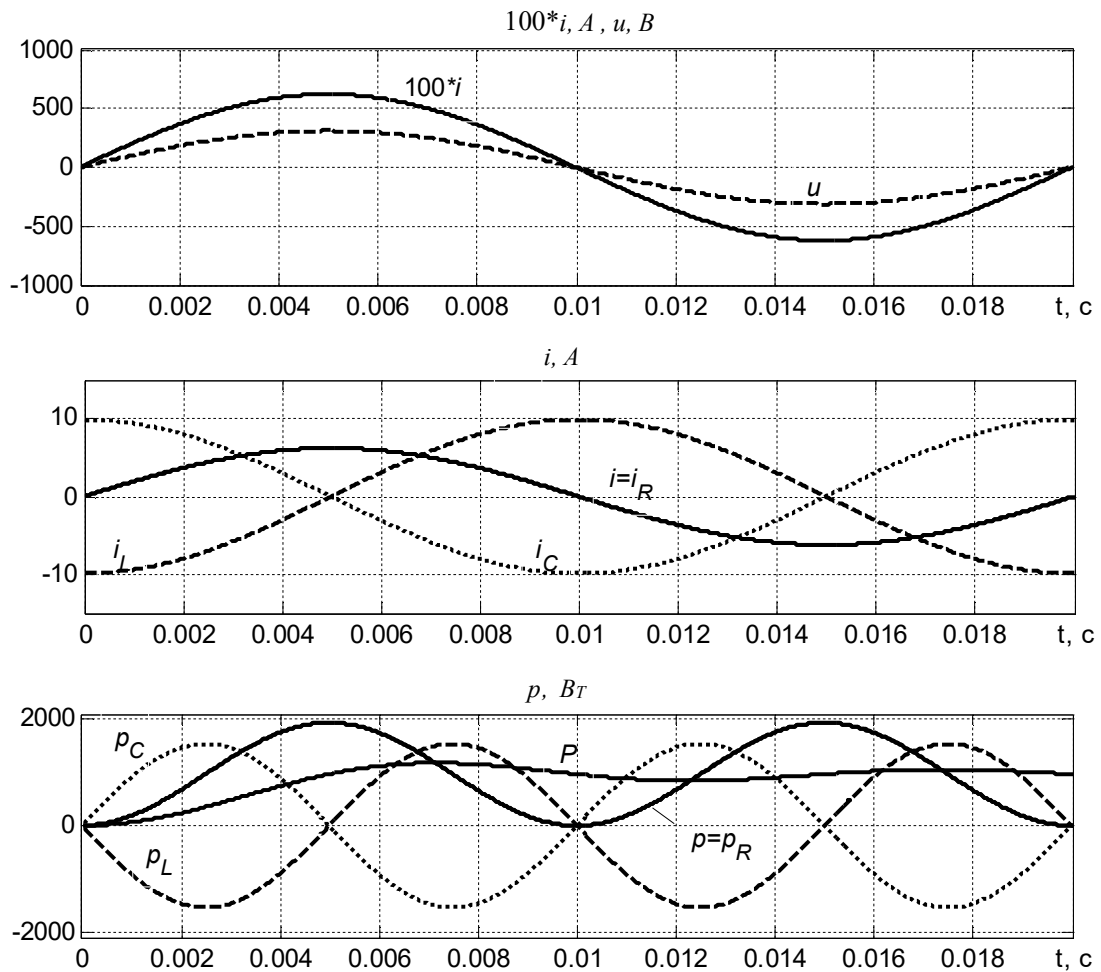


Рисунок 22 – Миттєві значення потужностей, напруги та струмів у стані резонансу струмів

Приклад 5. Для електричного (рис. 23) визначити величину та характер реактивного опору X_2 , з умов резонансу струмів на ділянці кола cd та напруг для усього кола.

Розрахувати струми та побудувати суміщену векторну діаграму струмів та топографічну діаграму напруг для обох режимів, якщо $R_1 = 10(\text{Ом})$, $R_2 = 17.692(\text{Ом})$, $X_{L2} = 13.4562(\text{Ом})$, $X_{C1} = 10(\text{Ом})$.

Вхідна напруга $u(t) = 127\sqrt{2} \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t + 45^\circ)(\text{В})$.

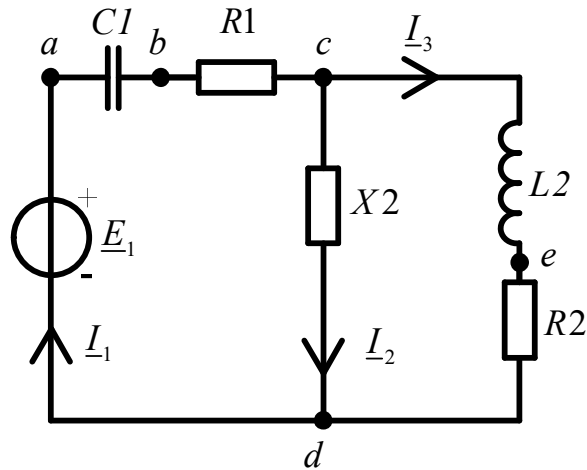


Рисунок 23 – Електричне коло

Рішення

Для переходу від опорів послідовної схеми до провідностей паралельної схеми заміщення двополюсника та навпаки використовують формули еквівалентного перетворення:

$$\begin{aligned}
 \underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j \cdot X} = \frac{1}{(R + j \cdot X)} \cdot \frac{(R - j \cdot X)}{(R - j \cdot X)} = \frac{R - j \cdot X}{R^2 + X^2} = \\
 &= \frac{R}{R^2 + X^2} - j \cdot \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} - j \cdot \frac{X}{Z^2} = G - j \cdot B; \\
 &\boxed{G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} = R \cdot Y^2; B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2} = X \cdot Y^2}; \\
 \underline{Z} &= \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G - j \cdot B} = \frac{1}{(G - j \cdot B)(G + j \cdot B)} = \frac{G + j \cdot B}{G^2 + B^2} = \\
 &= \frac{G}{G^2 + B^2} + j \cdot \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2} + j \cdot \frac{B}{Y^2} = R + j \cdot X; \\
 &\boxed{R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2} = G \cdot Z^2; X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{Y^2} = B \cdot Z^2},
 \end{aligned} \tag{52}$$

B та X завжди мають однаковий знак.

Перша частина. В електричному колі можливий **резонанс струмів** на ділянці cd під час виконання умови $B_{cd} = B_2 + B_3 = 0$. Відповідно реактивні провідність та опір другої вітки дорівнюють:

$$\begin{aligned}
B_2 = -B_3 &= -\frac{X_{L2}}{R_2^2 + X_{L2}^2} = -\frac{13.462}{17.692^2 + 13.462^2} = -0.027(\text{См}); \\
X_2 &= \frac{1}{B_2} = \frac{1}{-0.027} = -36.714(\text{Ом}); \\
X_{C2} &= X_2 = -36.714(\text{Ом}).
\end{aligned} \tag{53}$$

Визначимо вхідний опір електричного кола (уявна частина комплексу провідності $\text{Im}(\underline{Y}_{cd}) = 0$):

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{cd} &= \frac{1}{\underline{Y}_{cd}} = \frac{1}{\underline{G}_{cd}} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_2^2 + X_{L2}^2}} = \frac{1}{\frac{17.692}{17.692^2 + 13.462^2}} = \\
&= \frac{1}{0.036} = 27.935(\text{Ом}); \\
\underline{Z}_e &= R_1 - jX_{C1} + \underline{Z}_{cd} = 10 - j10 + 27.935 = 37.935 - j10 = \\
&= 39.231 \angle -14.768^\circ(\text{Ом}).
\end{aligned} \tag{54}$$

Розрахуємо струми віток електричного кола:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_e} = \frac{127 \angle 45^\circ}{39.231 \angle -14.768^\circ} = 1.63 + j \cdot 2.797 = 3.237 \angle 59.768^\circ(\text{А}); \\
\underline{I}_2 &= \underline{I}_1 \cdot \frac{(R_2 + j \cdot X_{L2})}{-j \cdot X_{C2} + (R_2 + j \cdot X_{L2})} = \\
&= 3.237 \angle 59.768^\circ \frac{22.231 \angle 37.266^\circ}{-j36.714 + 22.231 \angle 37.266^\circ} = \\
&= -2.128 + j \cdot 1.24 = 2.463 \angle 149.768^\circ(\text{А}); \\
\underline{I}_3 &= \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = (1.63 + j \cdot 2.797) - (-2.128 + j \cdot 1.24) = \\
&= 3.758 + j \cdot 1.557 = 4.068 \angle 22.501^\circ(\text{А}).
\end{aligned} \tag{55}$$

Перевіримо правильність вирішення задачі за балансом потужностей:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{\text{дж}} &= \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* = P_{\text{дж}} + j \cdot Q_{\text{дж}} = 127 \angle 45^\circ \cdot 3.237 \angle -59.768^\circ = \\
&= 397.551 - j \cdot 104.799 \text{ (ВА)}; \\
\underline{S}_{\text{сп}} &= P_{\text{сп}} + j \cdot Q_{\text{сп}} = I_1^2 \cdot (R_1 - j \cdot X_{C1}) + I_2^2 \cdot (-j \cdot X_{C1}) + I_3^2 \cdot (R_2 + j \cdot X_{L2}) = \\
&= 3.237^2 \cdot (10 - j \cdot 10) + 2.463^2 \cdot (-j \cdot 36.714) + \dots \\
&\dots + 4.068^2 \cdot (17.692 + j \cdot 13.462) = \\
&= 397.546 - j104.791 \text{ (ВА)}; \\
\frac{P_{\text{дж}} - P_{\text{сп}}}{P_{\text{дж}}} \cdot 100\% &= \frac{397.551 - 397.546}{397.551} \cdot 100\% = 1.281 \cdot 10^{-5}; \\
P_{\text{дж}} &\approx P_{\text{сп}}; \\
\frac{Q_{\text{дж}} - Q_{\text{сп}}}{Q_{\text{дж}}} \cdot 100\% &= \frac{104.799 - 104.791}{104.799} \cdot 100\% = 7.287 \cdot 10^{-5}; \\
Q_{\text{дж}} &\approx Q_{\text{сп}}. \tag{56}
\end{aligned}$$

Обрахуємо комплекси напруг на елементах електричного кола (рис. 23):

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{C2} &= \underline{I}_2 \cdot (-j \cdot X_{C2}) = 2.463 \angle 149.768^\circ \cdot (-j \cdot 36.714) = \\
&= 90.432 \angle 59.768^\circ \text{ (В)}; \\
\underline{U}_{R1} &= \underline{I}_1 \cdot R_1 = 3.237 \angle 59.768^\circ \cdot 10 = 32.373 \angle 59.768^\circ \text{ (В)}; \\
\underline{U}_{C1} &= \underline{I}_1 \cdot (-j \cdot X_{C1}) = 3.237 \angle 59.768^\circ \cdot (-j \cdot 10) = 32.373 \angle -30.232^\circ \text{ (В)}; \\
\underline{U}_{R2} &= \underline{I}_3 \cdot R_2 = 4.068 \angle 22.501^\circ \cdot 17.692 = 71.967 \angle 22.501^\circ \text{ (В)}; \\
\underline{U}_{L2} &= \underline{I}_3 \cdot (j \cdot X_{L2}) = 4.068 \angle 22.501^\circ \cdot j13.462 = 54.761 \angle 112.501^\circ \text{ (В)}. \tag{57}
\end{aligned}$$

Для побудови топографічної діаграми напруг (рис. 24) знайдемо комплекси потенціалів точок електричного кола

$$\begin{aligned}
\underline{\varphi}_d &= 0; \\
\underline{\varphi}_c &= \underline{\varphi}_d + \underline{U}_{C2} = 0 + 90.432 \angle 59.768^\circ = 90.432 \angle 59.768^\circ \text{ (В)}; \\
\underline{\varphi}_b &= \underline{\varphi}_c + \underline{U}_{R1} = 90.432 \angle 59.768^\circ + 32.373 \angle 59.768^\circ = \\
&= 122.805 \angle 59.768^\circ \text{ (В)}; \\
\underline{\varphi}_a &= \underline{\varphi}_b + \underline{U}_{C1} = 122.805 \angle 59.768^\circ + 32.373 \angle -30.232^\circ = 127 \angle 45^\circ \text{ (В)}; \\
\underline{\varphi}_e &= \underline{\varphi}_d + \underline{U}_{R2} = 0 + 71.967 \angle 22.501^\circ = 71.967 \angle 22.501^\circ \text{ (В)}; \\
\underline{\varphi}_c &= \underline{\varphi}_e + \underline{U}_{L2} = 71.967 \angle 22.501^\circ + 54.761 \angle 112.501^\circ = 90.432 \angle 59.768^\circ \text{ (В)}. \tag{58}
\end{aligned}$$

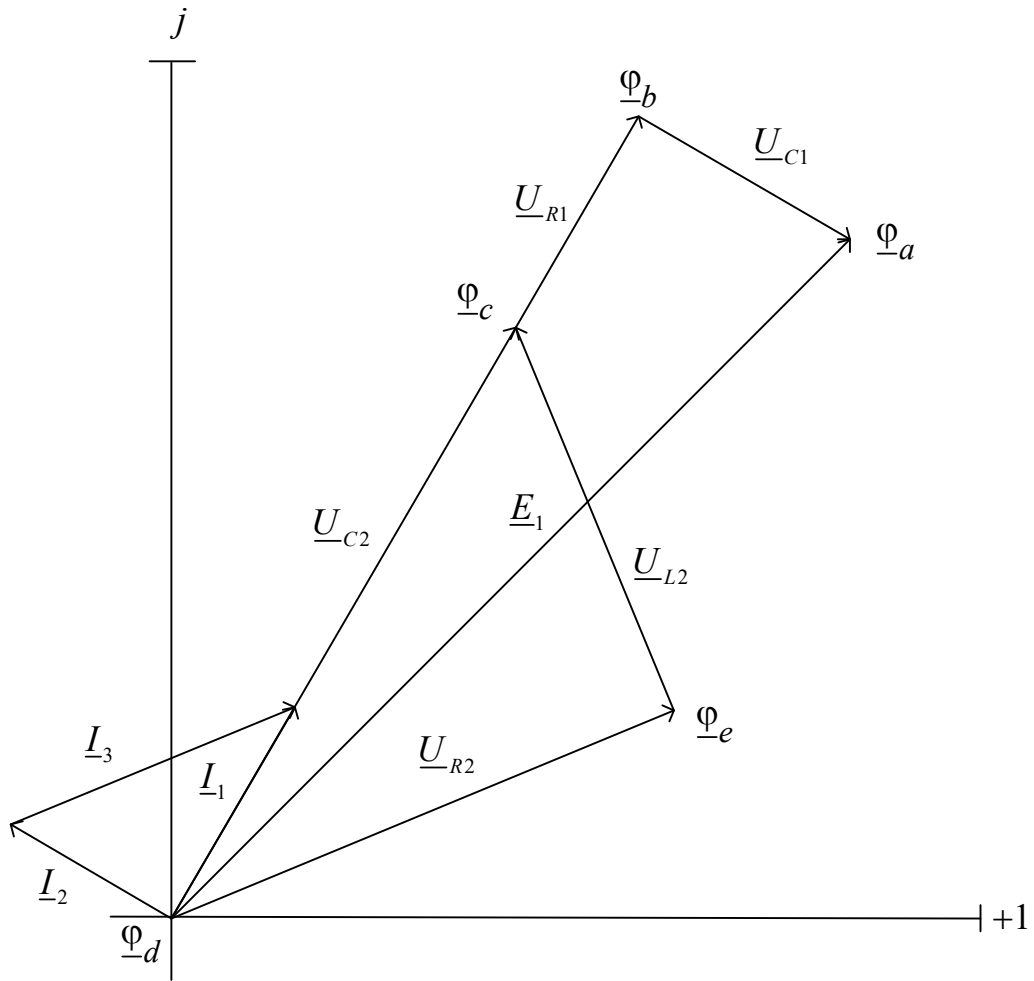


Рисунок 24 – Топографічна діаграма напруг та суміщена діаграма струмів у стані резонансу струмів на ділянці кола cd

З векторної діаграми видно, що на резонансній ділянці напруга $\underline{U}_{c2} = \underline{U}_{dc}$ та струм \underline{I}_1 **співпадають за фазою** (паралельні).

Другу частину. Визначимо величину на характер опор X_2 (рис. 23) з умови **резонансу напруг** для усього кола.

Розрахуємо вхідний опір схеми до електричного кола, яке зображено на рис. 23:

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = R_1 - j \cdot X_{C1} + \frac{j \cdot X_2 \cdot (R_2 + j \cdot X_{L2})}{j \cdot X_2 + (R_2 + j \cdot X_{L2})}. \quad (59)$$

Позбудемося від уявної частини у знаменнику виразу для вхідного опору (59), виділимо уявну частину вхідного опору та отримаємо реактивний опір усього електричного кола

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}[Z_{\text{BX}}] &= 0; \\
 \frac{(j \cdot X_2 \cdot R_2 - X_{L2} \cdot X_2) \cdot (R_2 - j(X_{L2} + X_2))}{(R_2 + j \cdot (X_{L2} + X_2) \cdot (R_2 - j(X_{L2} + X_2)))} &= j \cdot X_{C1}; \\
 \frac{(j \cdot X_2 \cdot R_2 - X_{L2} \cdot X_2) \cdot (R_2 - j \cdot (X_{L2} + X_2))}{R_2^2 + (X_{L2} + X_2)^2} &= j \cdot X_{C1}; \\
 \frac{jX_2R_2R_2 + \cancel{X_2R_2X_{L2}} + X_2R_2X_2 - \cancel{X_{L2}X_2R_2} + X_{L2}X_2j(X_{L2} + X_2)}{R_2^2 + (X_{L2} + X_2)^2} &= \\
 = j \cdot X_{C1}; \\
 \frac{\cancel{X_2R_2X_2}}{R_2^2 + (X_{L2} + X_2)^2} + \frac{j \cdot X_2 \cdot R_2^2 + X_{L2} \cdot X_2 \cdot j \cdot (X_{L2} + X_2)}{R_2^2 + (X_{L2} + X_2)^2} &= j \cdot X_{C1}.
 \end{aligned} \tag{60}$$

Оскільки при резонансі для усього кола його еквівалентний реактивний опір дорівнює нулю $X_{Le} - X_{Ce} = 0$, то необхідно прирівняти до нуля чисельник. За цієї умови отримаємо рівняння для визначення реактивного опору X_2

$$\begin{aligned}
 \frac{j \cdot X_2 \cdot 17.692^2 + 13.462 \cdot X_2 \cdot j \cdot (13.462 + X_2)}{17.692^2 + (13.462 + X_2)^2} &= j \cdot 10; \\
 \frac{j \cdot X_2 \cdot 17.692^2 + 13.462 \cdot X_2 \cdot j \cdot (13.462 + X_2)}{17.692^2 + (13.462 + X_2)^2} - j \cdot 10 &= 0; \\
 \frac{jX_217.692^2 + 13.462X_2j(13.462 + X_2) - j10(17.692^2 + (13.462 + X_2)^2)}{17.692^2 + (13.462 + X_2)^2} &= 0; \\
 jX_217.692^2 + 13.462X_2j(13.462 + X_2) - j10(17.692^2 + (13.462 + X_2)^2) &= 0 \\
 X_{21} &= -82.329(\text{Ом}); \\
 X_{22} &= 17.34(\text{Ом}).
 \end{aligned} \tag{61}$$

Резонанс напруг для усього кола можливий при ємнісному та індуктивному характері елемента з умови (60)

Виберемо $X_2 = X_{L1} = X_{22} = 17.34(\text{Ом})$ та розрахуємо вхідний опір схеми та струми віток:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_{\text{BX}} &= R_1 - j \cdot X_{C1} + \frac{j \cdot X_{L1} \cdot (R_2 + j \cdot X_{L2})}{j \cdot X_{L1} + (R_2 + j \cdot X_{L2})} = \\
 &= 10 - j \cdot 10 + \frac{j \cdot 17.34 \cdot (17.692 + j \cdot 13.462)}{j \cdot 17.34 + (17.692 + j \cdot 13.462)} = 14.216 \angle -0.00003^\circ (\text{Ом}); \\
 \underline{I}_1 &= \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_{\text{BX}}} = \frac{127 \angle 45^\circ}{14.216 \angle -0.00003^\circ} = 6.317 + j \cdot 6.317 = 8.934 \angle 45^\circ (\text{А}); \\
 \underline{I}_2 &= 8.934 \angle 45^\circ \cdot \frac{(R_2 + j \cdot X_{L2})}{j \cdot X_{L1} + (R_2 + j \cdot X_{L2})} = \\
 &= 8.934 \angle 45^\circ \cdot \frac{22.231 \angle 37.266^\circ}{j \cdot 17.34 + 22.231 \angle 37.266^\circ} = 5.179 + j 2.107 = \\
 &= 5.591 \angle 22.139^\circ (\text{А}); \\
 \underline{I}_3 &= \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = (6.317 + j \cdot 6.317) - (5.179 + j 2.107) = 1.138 + j \cdot 4.21 = \\
 &= 4.361 \angle 74.873^\circ (\text{А}).
 \end{aligned} \tag{62}$$

Перевіримо правильність вирішення задачі за балансом потужностей

$$\begin{aligned}
 \underline{S}_{\text{дж}} &= \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* = P_{\text{дж}} + j \cdot Q_{\text{дж}} = 127 \angle 45^\circ \cdot 8.934 \angle -45^\circ = \\
 &= 1135 - j 0.0006321 (\text{ВА}); \\
 \underline{S}_{\text{сп}} &= P_{\text{сп}} + j \cdot Q_{\text{сп}} = I_1^2 \cdot (R_1 - j \cdot X_{C1}) + I_2^2 \cdot (j \cdot X_{L1}) + I_3^2 \cdot (R_2 + j \cdot X_{L2}) = \\
 &= 8.934^2 \cdot (10 - j \cdot 10) + 5.591^2 \cdot (-j \cdot 36.714) + 4.361^2 \cdot (17.692 + j \cdot 13.462) = \\
 &= 1135 - j \cdot 0.00941 (\text{ВА});
 \end{aligned}$$

$$\frac{P_{\text{дж}} - P_{\text{сп}}}{P_{\text{дж}}} \cdot 100\% = \frac{1135 - 1135}{1135} \cdot 100\% = 0;$$

$$P_{\text{дж}} = P_{\text{сп}};$$

$$\frac{Q_{\text{дж}} - Q_{\text{сп}}}{Q_{\text{дж}}} \cdot 100\% = \frac{0.0006321 - 0.00941}{0.0006321} \cdot 100\% = -13.887\% \tag{63}$$

$$Q_{\text{дж}} \approx Q_{\text{сп}}.$$

Обрахуємо напруги на елементах електричного кола (рис. 23):

$$\underline{U}_{L1} = \underline{I}_2 \cdot j \cdot X_{L1} = 5.591 \angle 22.139^\circ \cdot j \cdot 17.34 = 96.951 \angle 112.139^\circ (\text{В});$$

$$\underline{U}_{R1} = \underline{I}_1 \cdot R_1 = 8.934 \angle 45^\circ \cdot 10 = 89.335 \angle 45^\circ (\text{В});$$

$$\underline{U}_{C1} = \underline{I}_1 \cdot (-j \cdot X_{C1}) = 8.934 \angle 45^\circ \cdot (-j \cdot 10) = 89.335 \angle -45^\circ (\text{В}); \quad (64)$$

$$\underline{U}_{R3} = \underline{I}_3 \cdot R_2 = 4.361 \angle 74.873^\circ \cdot 17.692 = 77.155 \angle 74.873^\circ (\text{В});$$

$$\underline{U}_{L2} = \underline{I}_3 \cdot (j \cdot X_{L2}) = 4.361 \angle 74.873^\circ \cdot j \cdot 13.462 = 58.708 \angle 164.873^\circ (\text{В}).$$

Для побудови топографічної діаграми напруг знайдемо комплекси потенціалів точок електричного кола:

$$\underline{\varphi}_d = 0;$$

$$\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_d + \underline{U}_{L1} = 0 + 96.951 \angle 112.139^\circ = 96.951 \angle 112.139^\circ (\text{В});$$

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}_b &= \underline{\varphi}_c + \underline{U}_{R1} = 96.951 \angle 112.139^\circ + 89.335 \angle 45^\circ = \\ &= 155.273 \angle 80.124^\circ (\text{В}); \end{aligned}$$

$$\underline{\varphi}_a = \underline{\varphi}_b + \underline{U}_{C1} = 155.273 \angle 80.124^\circ + 89.335 \angle -45^\circ = 127 \angle 45^\circ (\text{В});$$

$$\underline{\varphi}_e = \underline{\varphi}_d + \underline{U}_{R2} = 0 + 77.155 \angle 74.873^\circ = 77.155 \angle 74.873^\circ (\text{В});$$

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}_c &= \underline{\varphi}_e + \underline{U}_{L2} = 77.155 \angle 74.873^\circ + 58.708 \angle 164.873^\circ = \\ &= 96.951 \angle 112.139^\circ (\text{В}). \end{aligned} \quad (65)$$

Суміщена векторна діаграм струмів та топографічна діаграми напруг електричного кола (рис. 23) у стані резонансу напруг представлена на рис. 25. З векторних діаграм видно, що на напруга живлення \underline{U}_1 та вхідний струм \underline{I}_1 співпадають за фазою (паралельні).

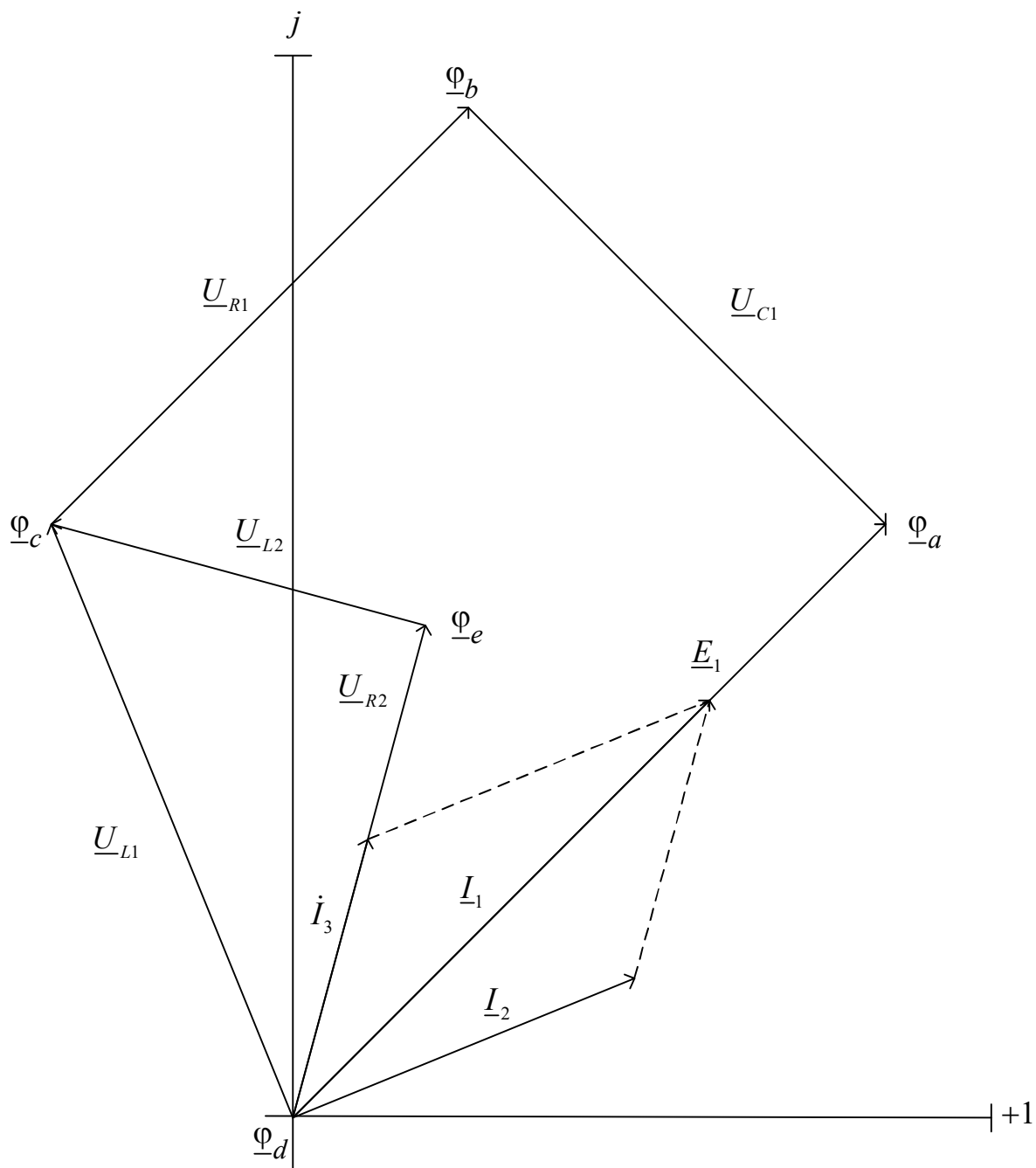


Рисунок 25 – Топографічна діаграма напруг та суміщена діаграма струмів у стані резонансу напруг

Приклад 6. Для електричного (рис. 26) визначити реактивний опір X_2 з умов резонансу струмів на ділянці кола cd . Послідовно з шуканим реактивним опором X_2 включений активний опір R_2 .

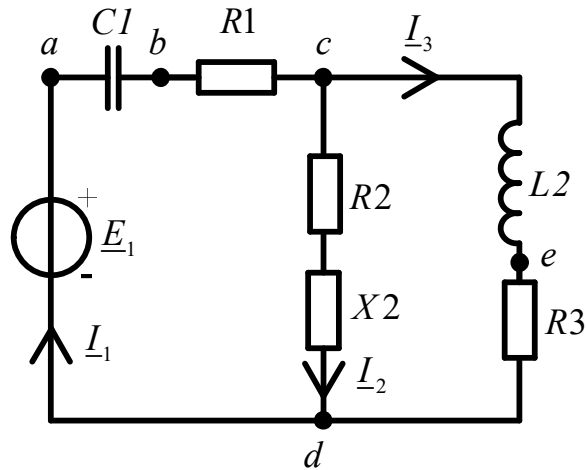


Рисунок 26 – Електричне коло

Використовуючи умову резонансу струмів та еквівалентне перетворення послідовної схеми на паралельну отримає шукану величину та характер реактивного опору X_2 :

$$\begin{aligned}
 B_2 - B_3 &= 0; \\
 B_2 &= B_3; \\
 \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} &= \frac{X_{L2}}{R_3^2 + X_{L2}^2}; \\
 X_2 \cdot (R_3^2 + X_{L2}^2) - X_{L2} \cdot (R_2^2 + X_2^2) &= 0.
 \end{aligned} \tag{66}$$

8 Частотні характеристики електричного кола

Частотна характеристика – це залежність вхідного опору двополюсника від частоти $\omega = 2\pi f$, тобто залежність реактивного опору X від частоти ω .

Проаналізуємо частотну характеристику вхідного опору в операторній формі $Z(p)$ електричного кола (рис. 23) при резонансі струмів (реактивний опір $X_2 = X_{C2} = 36.714$ (Ом)), де $p = j\omega$ - оператор Лапласа. Перетворимо задану схему (рис. 23) на електричне коло без активних опорів (не залежить від частоти), яке представлено на рис. 27.

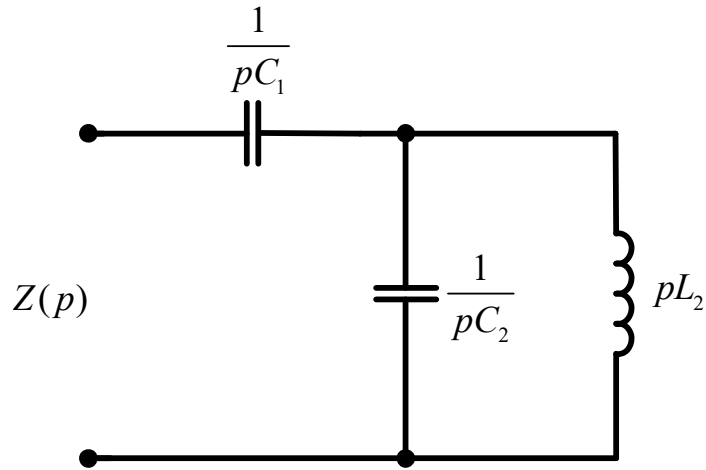


Рисунок 27 – Електрична схема

Визначимо параметри елементів електричної схеми (рис. 27):

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{\omega \cdot X_{C1}} = \frac{1}{314.156 \cdot 10} = 3.183 \cdot 10^{-4} (\Phi); \\
 C_2 &= \frac{1}{\omega \cdot X_{C2}} = \frac{1}{314.156 \cdot 36.714} = 8.67 \cdot 10^{-5} (\Phi); \\
 L_2 &= \frac{X_{L2}}{\omega} = \frac{13.462}{314.156} = 0.043 (\text{Гн}).
 \end{aligned} \tag{67}$$

Вхідний опір $Z(p)$ для наведеної схеми дорівнює:

$$\begin{aligned}
 Z(p) &= \frac{1}{p \cdot C_1} + \frac{p \cdot L_2 \cdot \frac{1}{p \cdot C_2}}{p \cdot L_2 + \frac{1}{p \cdot C_2}} = \frac{1}{p \cdot C_1} + \frac{p \cdot L_2 \cdot \cancel{\frac{1}{p C_2}}}{\frac{p^2 \cdot L_2 \cdot C_2 + 1}{\cancel{p \cdot C_2}}} = \\
 &= \frac{1}{p \cdot C_1} + \frac{p \cdot L_2}{p^2 \cdot L_2 \cdot C_2 + 1} = \\
 &= \frac{(p^2 \cdot L_2 \cdot C_2 + 1) + p \cdot C_1 \cdot p \cdot L_2}{p \cdot C_1 \cdot (p^2 \cdot L_2 \cdot C_2 + 1)} = \frac{p^2 \cdot L_2 \cdot (C_1 + C_2) + 1}{p \cdot (p^2 \cdot L_2 \cdot C_1 \cdot C_2 + C_1)} = \frac{N(p)}{M(p)}.
 \end{aligned} \tag{68}$$

Поліноми $N(p)$ та $M(p)$ дорівнюють

$$\begin{aligned}
 N(p) &= p^2 \cdot L_2 \cdot (C_1 + C_2) + 1; \\
 M(p) &= p^3 \cdot L_2 \cdot C_1 \cdot C_2 + C_1 \cdot p.
 \end{aligned} \tag{69}$$

Вірно визначений вхідний опір кола, що складається виключно з реактивних елементів, повинен задовільняти наступним умовам:

а) поліном $N(p)$ має парні ступені p , а поліном $M(p)$ має непарні ступені p ;

б) вищі ступені обох поліномів відрізняються на ± 1 ;

в) усі коефіцієнти при p обох поліномів повинні бути додатними.

Враховуючи, що $p = j\omega$, для $Z(j\omega)$ маємо:

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \frac{-\omega^2 \cdot L_2 \cdot (C_1 + C_2) + 1}{-j \cdot \omega^3 \cdot L_2 \cdot C_1 \cdot C_2 + j \cdot \omega \cdot C_1} = \frac{-\omega^2 \cdot L_2 \cdot (C_1 + C_2) + 1}{-j \cdot (\omega^3 \cdot L_2 \cdot C_1 \cdot C_2 - \omega \cdot C_1)} = \\ &= \frac{-\omega^2 \cdot L_2 \cdot (C_1 + C_2) + 1}{-j \cdot (\omega^3 \cdot L_2 \cdot C_1 \cdot C_2 - \omega \cdot C_1)} \cdot \frac{j}{j} = j \cdot \frac{-\omega^2 \cdot L_2 \cdot (C_1 + C_2) + 1}{\omega^3 \cdot L_2 \cdot C_1 \cdot C_2 - \omega \cdot C_1} = \\ &= j \cdot \frac{a_2 \cdot \omega^2 + a_0}{b_3 \cdot \omega^3 + b_1 \cdot \omega} = j \cdot \frac{F(\omega)}{H(\omega)} = j \cdot X(\omega); \end{aligned} \tag{70}$$

$$\boxed{X(\omega) = \frac{F(\omega)}{H(\omega)}}.$$

де $a_0 = 1$;

$a_1 = 0$;

$a_2 = -L_2 \cdot (C_1 + C_2) = -0.043 \cdot (3.183 \cdot 10^{-4} + 8.67 \cdot 10^{-5}) = -1.736 \cdot 10^{-5}$;

$b_0 = 0$;

$b_1 = -C_1 = -3.183 \cdot 10^{-4}$;

$b_2 = 0$;

$b_3 = L_2 \cdot C_1 \cdot C_2 = 0.043 \cdot 3.183 \cdot 10^{-4} \cdot 8.67 \cdot 10^{-5} = 1.183 \cdot 10^{-9}$.

Таким чином, для вхідного опору маємо:

$$X(\omega) = \frac{a_2 \omega^2 + a_0}{b_3 \omega^3 + b_1 \omega} = \frac{-1.736 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^2 + 1}{1.183 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^3 - 3.183 \cdot 10^{-4} \cdot \omega} = \frac{F(\omega)}{H(\omega)}. \quad (71)$$

З рівняння $F(\omega) = 0$ визначимо нульові значення функції $X(\omega)$ (тільки додатні частоти):

$$\begin{aligned} -1.736 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^2 + 1 &= 0; \\ \omega^2 &= \frac{-1}{-1.736 \cdot 10^{-5}} = \frac{1}{1.736 \cdot 10^{-5}}; \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{1.736 \cdot 10^{-5}}} = \underline{240.042} \text{ (с}^{-1}\text{)}; \\ \omega_2 &= -\sqrt{\frac{1}{1.736 \cdot 10^{-5}}} = -240.042 \text{ (с}^{-1}\text{)}. \end{aligned} \quad (72)$$

Оскільки від'ємні частоти фізично не реалізуються, то нулем функції $X(\omega)$ є частота $\omega_1 = 240.042 \text{ с}^{-1}$.

Прирівнюємо $H(\omega) = 0$ та визначаємо полюси функції $X(\omega)$:

$$\begin{aligned} 1.183 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^3 - 3.183 \cdot 10^{-4} \cdot \omega &= \omega \cdot (1.183 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^2 - 3.183 \cdot 10^{-4}) = 0; \\ \omega_3 &= 0; \\ 1.183 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^2 - 3.183 \cdot 10^{-4} &= 0; \\ \omega^2 &= \frac{3.183 \cdot 10^{-4}}{1.183 \cdot 10^{-9}}; \\ \omega_{4,5} &= \pm \sqrt{\frac{3.183 \cdot 10^{-4}}{1.183 \cdot 10^{-9}}} = \pm 518.821 \text{ (с}^{-1}\text{)}. \end{aligned} \quad (73)$$

Таким чином, маємо два полюси на частотах $\omega_3 = 0$ та $\omega_4 = 518.821 \text{ с}^{-1}$.

Побудуємо частотну характеристику електричного кола $X(\omega)$ на рис.

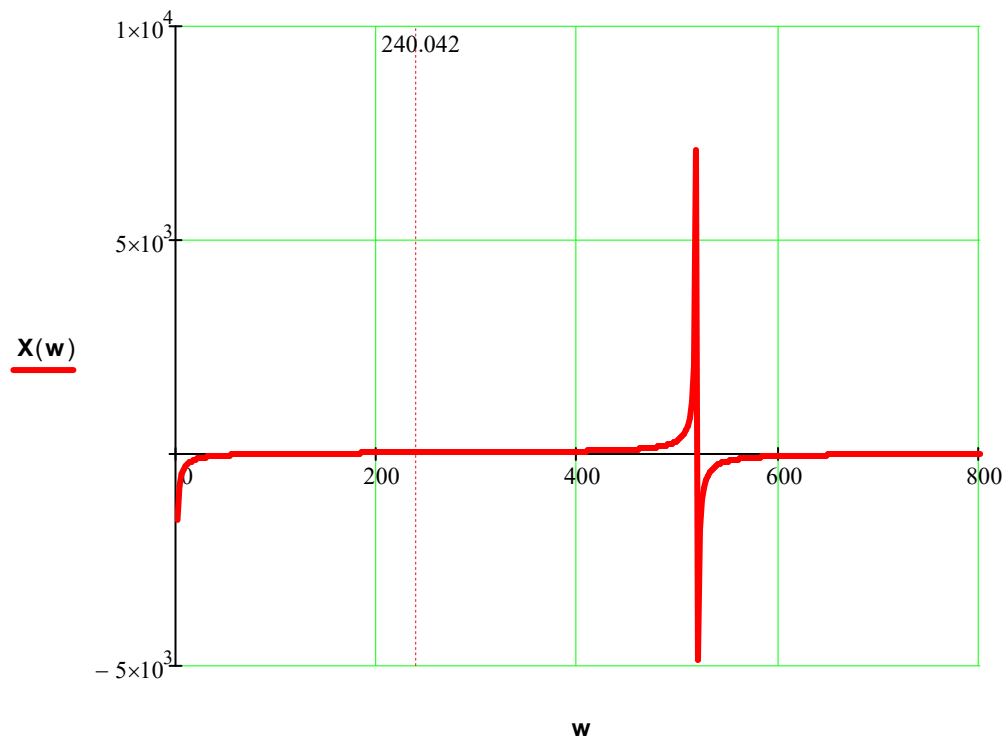


Рисунок 28 – Частотна характеристика $X(\omega)$ електричного кола

9 Методичні вказівки до розрахунку синусоїдних струмів в електричному колі з взаємною індуктивністю

Електричний струм проходячи по контуру створює навкруги нього магнітне поле, напрямок струму та напрямок ліній створеного ним магнітного поля зв'язані правилом буравчика (*правого гвинта*) рис. 29 [9]. Потік вектора магнітної індукції крізь деяку поверхню називається *магнітним потоком* [10].

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}, (B\delta). \quad (74)$$

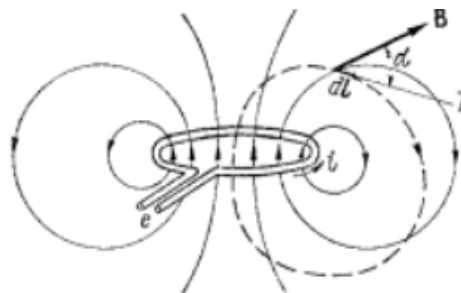


Рисунок 29

Для підсилення магнітного поля застосовують не поодинокі контури, а котушки з w контурів (витків). Котушку можна розглядати як контур, що має складну поверхню (рис. 30)

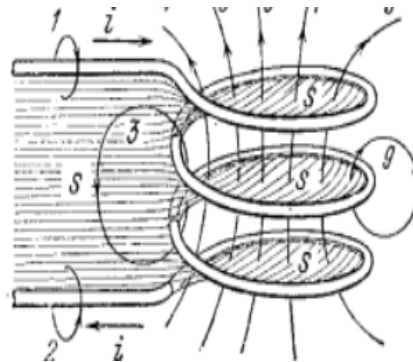


Рисунок 30

Різні лінії магнітної індукції пронизують цю поверхню різне число разів, тому в цих випадках вводять поняття потокозчеплення.

Потокозчеплення – являє собою магнітний потік, що зчеплений з усією котушкою, яка складається з w витків та має ту ж саму одиницю виміру, що і магнітний потік Φ (Вебер). Величину ψ отримують множенням потоку кожної одиничної лінії магнітної індукції на число витків, з якими вона зчеплена, та виконуючи алгебраїчне додавання отриманих чисел. Зазвичай під час розрахунку наближено рахують, що усі лінії магнітної індукції зчеплюються з усіма w витками котушки

$$\psi = w \cdot \Phi \quad (75)$$

Потокозчеплення котушки, що викликане власним струмом котушки i , називається **потокозчепленням самоіндукції** та позначається ψ_L . Дослідним шляхом визначено, що

$$\psi_L = L \cdot i \quad (76)$$

де $L = \frac{\psi_L}{i}$ – власна індуктивність (індуктивність котушки) це скалярна фізична величина, яка характеризує властивість котушки накопичувати енергію в магнітному полі, Гн.

Індуктивність L залежить від геометричних розмірів, числа витків w , а також від абсолютної магнітної проникності μ середовища, в якому існує магнітне поле. Якщо $\mu \neq const$ та залежить від напруженості магнітного поля H , то $L \neq const$ (катушка з феромагнітним осердям).

Будь-яка зміна електричного струму в катушці супроводжується зміною магнітного потоку, що пронизує цю катушку, та виникненням у ній ЕРС електромагнітної індукції. Явище наведення ЕРС у будь-якому контурі при зміні струму, що проходить у цьому контурі, називається *самоіндукцією*, а наведену (індуковану) ЕРС називають **ЕРС самоіндукції** та позначають

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d(L \cdot i)}{dt} = -L \cdot \frac{di}{dt}, \quad L = const. \quad (76)$$

У випадку двох та декількох катушок зі струмами магнітне потокозчеплення кожної катушки може визначатися не тільки власним струмом катушки, але і струмами у інших катушках.

Розглянемо дві катушки з числом витків w_1 , w_2 та струмами i_1 , i_2 відповідно, які віддалені одна від одної на деяку відстань (рис.31).

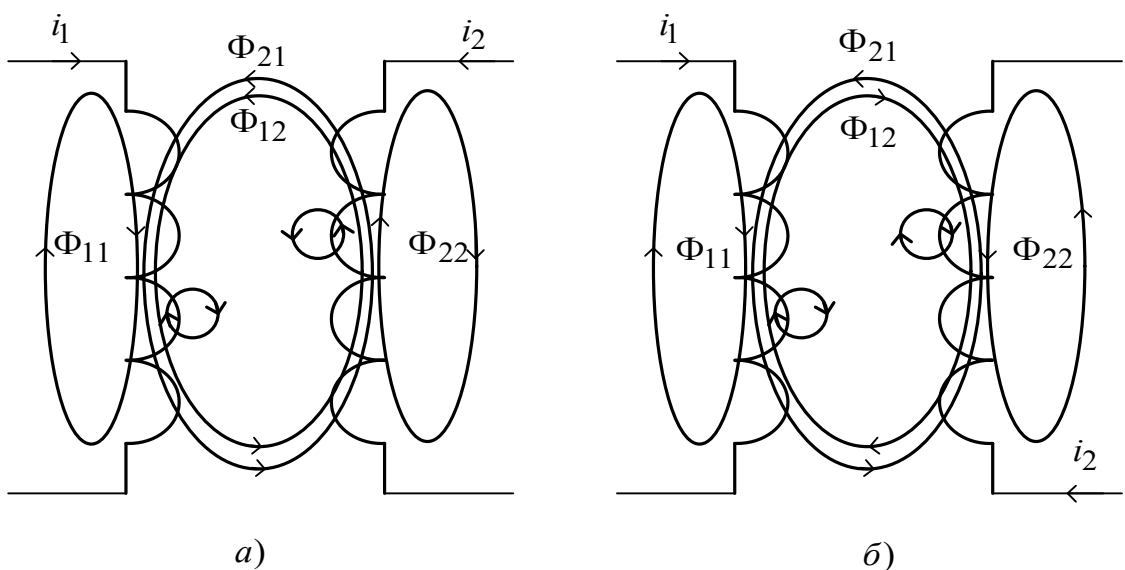


Рисунок 31 – Катушки індуктивності, що зв'язані магнітним полем

Струм i_1 , який проходить по першій котушці, визиває магнітний потік самоіндукції Φ_{11} , який пронизує витки першої котушки, створюючи потокозчеплення самоіндукції $\psi_{11} = w_1 \cdot \Phi_{11}$. Частина магнітного потоку самоіндукції першої котушки Φ_{21} пронизує витки другої котушки, створюючи потокозчеплення взаємної індукції $\psi_{21} = w_2 \cdot \Phi_{21}$ (перший індекс вказує на те, з якої котушки розглядається зчеплення потоку, другий – вказує, який струм створив це потокозчеплення).

В свою чергу, струм i_2 , що проходить по другій котушці, визиває магнітний потік самоіндукції Φ_{22} , частина якого Φ_{12} пронизує витки першої котушки. Відповідно у другій котушці виникає потокозчеплення самоіндукції $\psi_{22} = w_2 \cdot \Phi_{22}$, а в першій – потокозчеплення взаємної індукції $\psi_{12} = w_1 \cdot \Phi_{12}$.

Дослідним шляхом встановлено, що $\psi_{12} = M_{12} \cdot i_2$, $\psi_{21} = M_{21} \cdot i_1$ причому $M_{12} = M_{21} = M$. Коефіцієнт M називають **взаємною індуктивністю контурів**. Це скалярна фізична величина, яка характеризує накопичення енергії у магнітному полі магнітно зв'язаних котушок та вимірюється у (Гн). Взаємна індуктивність M залежить від геометричних розмірів, числа витків w_1, w_2 , взаємного розташування котушок, а також від абсолютної магнітної проникності середовища μ , в якому існує магнітне поле. Надалі будемо вважати $\mu = \text{const}$ та $M = \text{const}$.

Загальне потокозчеплення відповідно першої та другої котушок дорівнює

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi_{11} \pm \psi_{12} = L_1 \cdot i_1 \pm M \cdot i_2; \\ \psi_2 &= \psi_{22} \pm \psi_{21} = L_2 \cdot i_2 \pm M \cdot i_1.\end{aligned}\tag{77}$$

У цих виразах ставлять знак «+», якщо потік взаємної індукції направлений у котушках у той саме бік, що і потік самоіндукції (рис. 31, а);

якщо в котушках потоки самоіндукції та взаємо індукції направлені зустрічно, то в представлених виразах ставлять знак «-» (рис. 31, б).

*Включення котушок, при якому потоки самоіндукції та взаємної індукції додаються, називається **узгодженням**.*

*Включення котушок, при якому потоки самоіндукції та взаємної індукції направлені зустрічно, називається **неузгодженням**.*

Зміна струму i_1 у першій котушці обумовлює зміну потокозчеплення самоіндукції першої котушки ψ_{11} та потокозчеплення взаємної індукції другої котушки ψ_{21} . В першій котушці відповідно до закону електромагнітної індукції наводиться ЕРС самоіндукції

$$e_{1L} = -\frac{d\psi_{11}}{dt} = -L_1 \cdot \frac{di_1}{dt}, \quad \text{а у другій} \quad - \quad \text{ЕРС взаємної індукції}$$

$$e_{2M} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M \cdot \frac{di_1}{dt}.$$

Відповідно, зміна струму i_2 у другій котушці обумовлює зміну потокозчеплення самоіндукції другої котушки ψ_{22} та потокозчеплення взаємної індукції першої котушки ψ_{12} , та з'явленню у другій котушці ЕРС самоіндукції

$$e_{2L} = -\frac{d\psi_{22}}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt}, \quad \text{а у першій} \quad - \quad \text{ЕРС взаємної індукції}$$

$$e_{1M} = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}.$$

Суть явища взаємної індукції полягає у наведенні ЕРС у будь-якій котушці при зміні струму у другій котушці. Це явище відображає взаємний зв'язок котушок, що зчепленні з загальним магнітним потоком.

Загальна ЕРС, що наводиться відповідно у першій та другій котушках:

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{d\psi_{11}}{dt} \mp \frac{d\psi_{12}}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt} = e_{1L} \pm e_{1M}; \\ e_2 &= -\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{d\psi_{22}}{dt} \mp \frac{d\psi_{21}}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} \mp M \frac{di_1}{dt} = e_{2L} \pm e_{2M}. \end{aligned} \quad (78)$$

ЕРС взаємної індукції e_{1M} , e_{2M} враховують зі знаком «+» у разі

узгодженого включення та зі знаком «-» у разі зустрічного.

При складанні рівнянь для електричних кіл, що зв'язані магнітно, необхідно знати *узгоджено* чи, навпаки, *зустрічно* спрямовані потоки само – та взаємоіндукції. Це залежить від напрямку намотки котушок і напрямку струму в них. Нагадаємо, що напрямок магнітного потоку у котушці визначається за правилом правої руки: *якщо правою рукою охопити котушку так щоб чотири пальці показували напрям струму у витках, тоді великий палець покаже напрям магнітного потоку*.

Узгоджений режим увімкнення котушок буде в тому випадку, коли при протіканні струмів по котушках їх потокозчеплення само - та взаємоіндукції додаються (рис. 32, а). У протилежному випадку потоки віднімаються – *неузгоджений* або **зустрічний** режим включення (рис. 33, а).

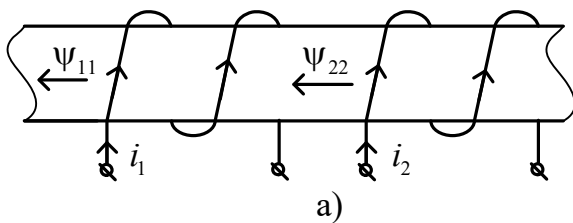


Рисунок 32 - Узгоджений режим

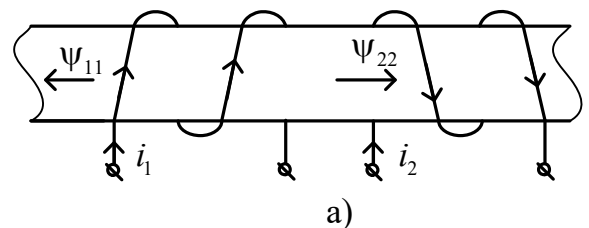


Рисунок 33 - Зустрічний режим

Два кінці індуктивно-зв'язаних елементів називаються *однойменними*, якщо при однакових напрямках струмів відносно цих кінців потокозчеплення само - та взаємоіндукції у кожному з елементів спрямовані однаково. На схемах однойменні кінці взаємозв'язаних котушок позначаються

спеціальними значками: точками (•) (рис. 32, б та рис. 33, б), зірочками (*) тощо.

По мірі віддалення двох контурів їх магнітний зв'язок зменшується і при достатній відстані взаємну індуктивність M можна не враховувати. Ступінь магнітного зв'язку між контурами (магнітнозв'язаними котушками L_1, L_2) характеризується коефіцієнтом зв'язку k .

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \leq 1, \text{ або } k = \frac{\omega \cdot M}{\sqrt{\omega \cdot L_1 \cdot \omega \cdot L_2}} = \frac{X_M}{\sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}}} \leq 1. \\
 k^2 &= \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} = \frac{M_{12} \cdot M_{21}}{L_1 \cdot L_2}; \\
 M_{12} &= \frac{\Psi_{12}}{i_2}; M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}; L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1}; L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2}; \\
 k^2 &= \frac{\Psi_{12} \cdot \Psi_{21} \cdot \cancel{i_1} \cdot \cancel{i_2}}{\Psi_{11} \cdot \Psi_{22} \cdot \cancel{i_1} \cdot \cancel{i_2}} = \frac{\Psi_{12} \cdot \Psi_{21}}{\Psi_{11} \cdot \Psi_{22}}.
 \end{aligned} \tag{78}$$

Оскільки $|\Psi_{21}| < |\Psi_{11}|$ та $|\Psi_{12}| < |\Psi_{22}|$, то $k^2 < 1$. Коефіцієнт зв'язку k міг би дорівнювати одиниці, якщо б $\Psi_{21} = \Psi_{11}$; $\Psi_{12} = \Psi_{22}$, тобто коли весь потік, що створений струмом в одній котушці, повністю зчеплювався з витками другої котушки, що могло б бути при суміщенні котушок.

9.1 Розрахунок електричних кіл при наявності взаємної індукції

Для розрахунку таких кіл можна використовувати метод рівнянь **Кірхгофа та метод контурних струмів**. Метод вузлових потенціалів для кола з індуктивно зв'язаними елементами використовувати не можна, бо різниця потенціалів індуктивно зв'язаної пари визначається не тільки струмом і індуктивністю даної вітки, а також і струмом другої вітки.

Не можна також використовувати метод еквівалентних перетворень в такому вигляді, як це було розглянуто раніше.

Якщо ж для розрахунку кола використовується метод рівнянь Кірхгофа, то послідовність виконання розрахунку є наступною:

- вибираємо додатні напрямки струмів;
- визначаємо кількість вузлів та контурів;
- встановлюємо магнітні положення індуктивно зв'язаних елементів і визначаємо якими будуть струми в індуктивно зв'язаних елементах - узгодженими чи ні. Тоді однойменні затискачі індуктивно зв'язаних котушок повинні бути вказані за умовою;
- складаємо необхідну кількість рівнянь;
- розв'язавши рівняння, знаходимо струми віток. Далі переходимо від комплексів до миттєвих значень.

При складанні рівнянь за II другим законом Кірхгофа необхідно враховувати напругу взаємної індукції. Знак комплексної напруги $\underline{U}_{mkp} = \pm j \cdot \omega \cdot M_{kp}$ на k - му елементі визначається при порівнянні обходу елемента k з позитивним напрямком струму через елемент p . Якщо ці напрямки відносно однойменних затискачів однакові, то $\underline{U}_{mkp} = +j \cdot \omega \cdot M_{kp}$; якщо різні, то $\underline{U}_{mkp} = -j \cdot \omega \cdot M_{kp}$.

Приклад 7. Для електричного кола (рис. 34) скласти рівняння за законами Кірхгофа та за методом контурних струмів, при наявності взаємної індукції між котушками L_1 , L_2 та L_3 [11].

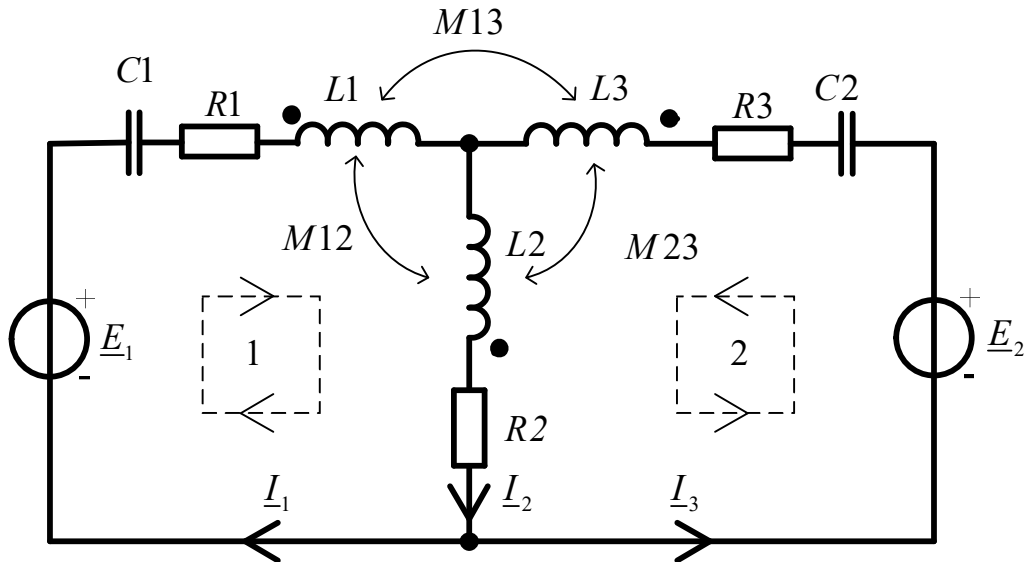


Рисунок 34 – Електричне схема

Запишемо рівняння за першим та другим законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0; \\ \frac{I_1}{j\omega C_1} + I_1 R_1 + I_1 j\omega L_1 + I_3 j\omega M_{13} - I_2 j\omega M_{12} + \dots \\ \dots + I_2 j\omega L_2 - I_1 j\omega M_{12} - I_3 j\omega M_{13} + I_2 R_2 = E_1; \\ \frac{I_3}{j\omega C_2} + I_3 R_3 + I_3 j\omega L_3 + I_1 j\omega M_{13} - I_2 j\omega M_{23} + \dots \\ \dots + I_2 j\omega L_2 - I_1 j\omega M_{12} - I_3 j\omega M_{13} + I_2 R_2 = E_2. \end{cases} \quad (79)$$

Якщо контурний струм $I_{1K} = I_1$, а $I_{2K} = I_3$, то рівняння електричного кола через контурні струми має наступний вигляд:

$$\begin{cases} I_{1K} \cdot Z_{11} + I_{2K} \cdot Z_{12} = E_{1K}; \\ I_{1K} \cdot Z_{21} + I_{2K} \cdot Z_{22} = E_{2K}. \end{cases} \quad (80)$$

де $Z_{11} = R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1 + j\omega L_2 - 2j\omega M_{12}$ – власний опір першого контуру, Ом;

$$\underline{Z}_{22} = R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2 + j\omega L_3 - 2j\omega M_{23} \quad - \text{ власний опір другого контуру, Ом;}$$

контуру, Ом;

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = R_2 + j\omega L_2 + j\omega M_{13} - j\omega M_{12} - j\omega M_{23} \quad - \text{ суміжний опір, Ом;}$$

$$\underline{E}_{1к} = \underline{E}_1 \quad - \text{ контурна ЕРС першого контуру, В;}$$

$$\underline{E}_{2к} = \underline{E}_2 \quad - \text{ контурна ЕРС другого контуру, В.}$$

Приклад 8. Розрахунок струмів комплексним методом електричного кола при наявності магнітного зв'язку між індуктивними елементами та векторні діаграми струмів і напруг наведені у Додатку А (пунктах 2-2.3)

9.2 Послідовне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок

Розглянемо електричну схему, яка представлена на рис. 35, де (*) – узгоджене включення, (▲) – зустрічне включення.

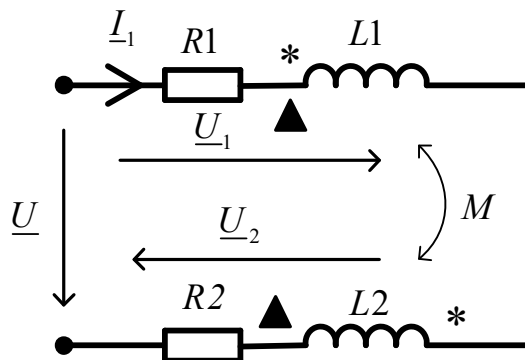


Рисунок 35 – Електричне коло з послідовно з'єднаними двома індуктивно зв'язаними котушок

Запишемо другий закон Кірхгофа для представленого електричного кола:

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2; \\ \underline{U}_1 &= R_1 \cdot \underline{I}_1 + j \cdot \omega \cdot L_1 \cdot \underline{I}_1 \pm j \cdot \omega \cdot M \cdot \underline{I}_1; \\ \underline{U}_2 &= R_2 \cdot \underline{I}_1 + j \cdot \omega \cdot L_2 \cdot \underline{I}_1 \pm j \cdot \omega \cdot M \cdot \underline{I}_1.\end{aligned}\quad (81)$$

Напруга взаємної індукції $j\omega M \underline{I}_1$ враховується із знаком «+», якщо котушки включені узгоджено, і з знаком «-», якщо зустрічно.

$$\begin{aligned}\underline{U} &= (R_1 + R_2) \cdot \underline{I}_1 + j \cdot (\omega \cdot L_1 + \omega \cdot L_2 \pm 2 \cdot \omega \cdot M) \cdot \underline{I}_1; \\ \underline{U} &= R_e \cdot \underline{I}_1 + j \cdot X_e \cdot \underline{I}_1; \\ R_e &= R_1 + R_2.\end{aligned}\quad (82)$$

де R_e – еквівалентний активний опір, величина якого не залежить від включення котушок.

$$X_{\text{еузг}} = \omega \cdot L_1 + \omega \cdot L_2 + 2 \cdot \omega \cdot M. \quad (83)$$

$$X_{\text{езустр}} = \omega \cdot L_1 + \omega \cdot L_2 - 2 \cdot \omega \cdot M. \quad (84)$$

Із (83) та (84) видно, що величина еквівалентного реактивного опору X_e залежить від способу включення котушок. Якщо котушки включені узгоджено, то X_e розраховується по формулі (83), якщо зустрічно, то по формулі (84).

За формулами (83) і (84), маючи значення реактивних опорів послідовно з'єднаних котушок при узгодженому та зустрічному включенні котушок, можна визначити взаємну індуктивність M за співвідношенням:

$$\begin{aligned}L_{\text{еузг}} - L_{\text{езустр}} &= L_1 + L_2 + 2 \cdot M - (L_1 + L_2 - 2 \cdot M) = 4 \cdot M, \\ M &= \frac{X_{\text{еузг}} - X_{\text{езустр}}}{4 \cdot \omega}.\end{aligned}\quad (85)$$

де $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ – кутова частота.

За приведеним рівнянням для напруг (81) побудуємо векторні діаграми послідовного з'єднання, окремо для кожного варіанту включення.

а) узгоджене включення (рис. 36)

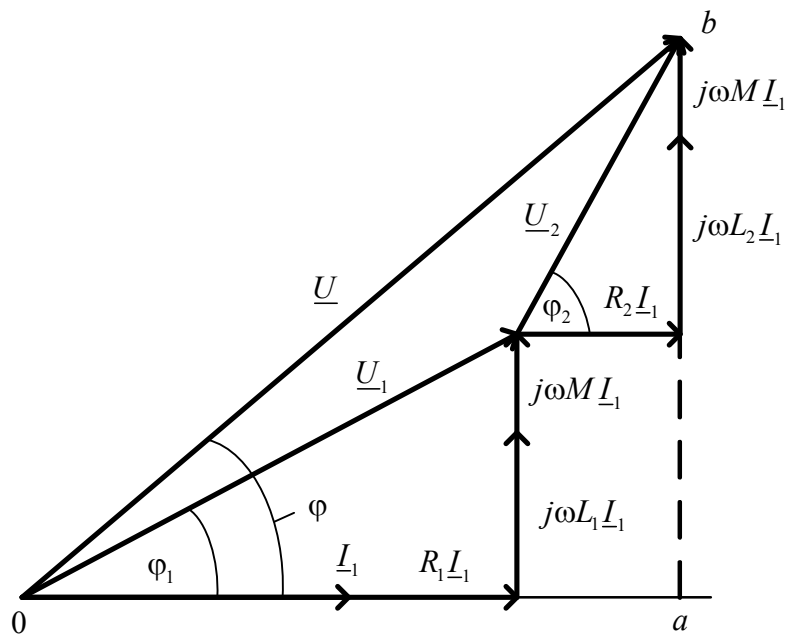


Рисунок 36 – Векторна діаграма при послідовному та узгодженому з'єднанні котушок

$\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 > 0$, $\varphi > 0$ – при послідовному узгодженому включенні всі кути φ додатні. $oa \sim R_e = R_1 + R_2$, $ab \sim X_e = X_1 + X_2 + 2 \cdot X_M$.

б) зустрічне включення (рис. 37)

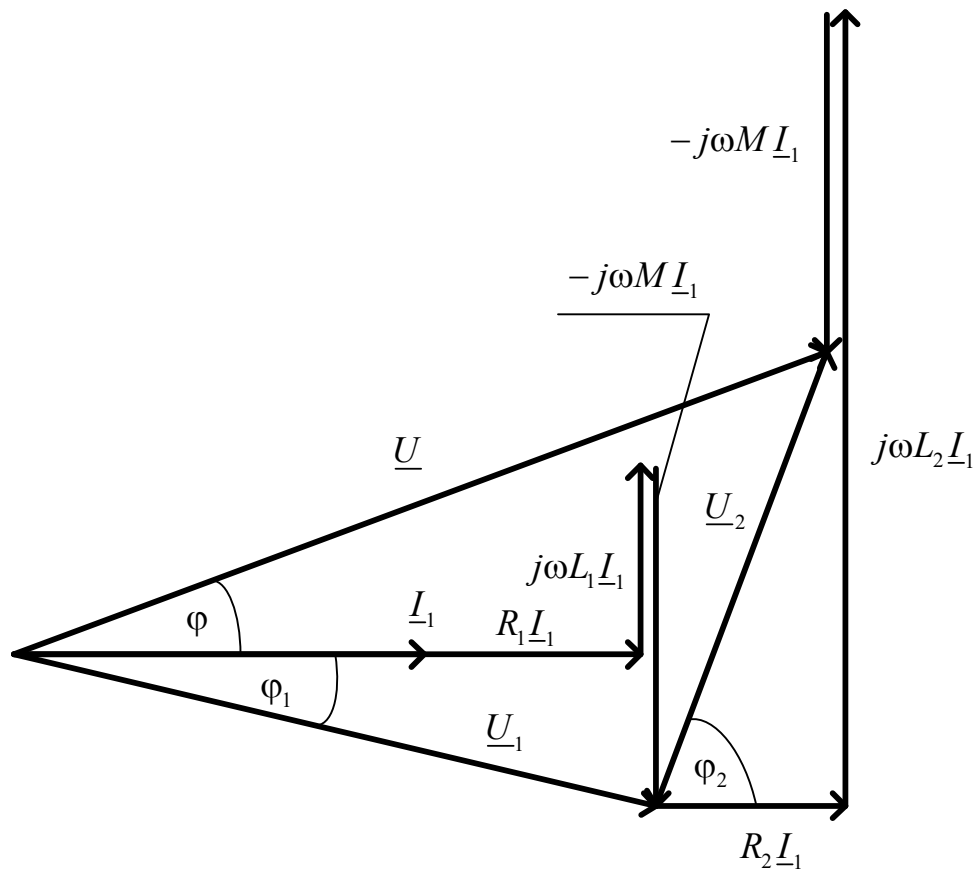


Рисунок 37 – Векторна діаграма при послідовному та неузгодженому з'єднанні котушок

$\varphi_1 < 0$ – ефект «хибної» ємності ($L_1 < M$), $\varphi_2 > 0$, $\varphi > 0$. В неузгодженому режимі увімкнення можливий випадок, коли напруга на одній із котушок, у даному випадку \underline{U}_1 , відстає від струму \underline{I}_1 – так званий ефект «несправжньої» ємності.

9.3 Паралельне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок

Розглянемо електричну схему, яка представлена на рис. 38.

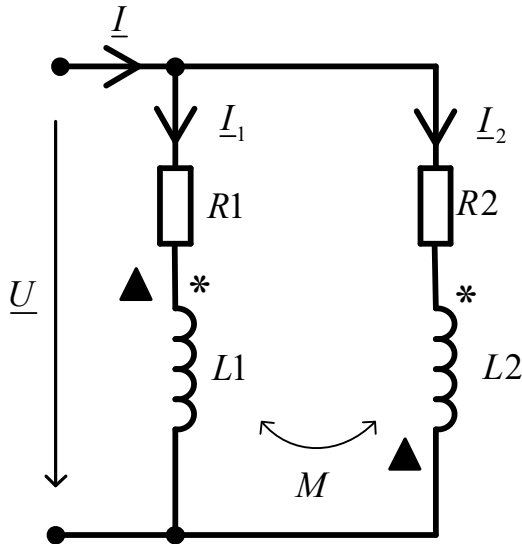


Рисунок 38 – Електричне коло з паралельно з'єднаними котушками

Запишемо I закон Кірхгофа та напруги на паралельних вітках для представленого електричного кола:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2; \\ \underline{U} &= R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 \pm j \cdot \omega \cdot M \cdot \underline{I}_2; \\ \underline{U} &= R_2 \cdot \underline{I}_2 + j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2 \pm j \cdot \omega \cdot M \cdot \underline{I}_1. \end{aligned} \quad (85)$$

де $\underline{Z}_1 = R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1$ - комплексний опір першої котушки без взаємодукції;

$\underline{Z}_2 = R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2$ - комплексний опір другої котушки без взаємодукції;

$\underline{Z}_M = j \cdot \omega \cdot M$ - комплексний опір взаємодукції.

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 \pm \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_2; \\ \underline{U} &= \pm \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (86)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (86) відносно невідомих струмів:

$$\begin{aligned} \underline{\Delta} &= \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \pm \underline{Z}_M \\ \pm \underline{Z}_M & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2, \\ \underline{\Delta}_1 &= \begin{vmatrix} \underline{U} & \pm \underline{Z}_M \\ \underline{U} & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{U} \cdot (\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M), \quad \underline{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{U} \\ \pm \underline{Z}_M & \underline{U} \end{vmatrix} = \underline{U} \cdot (\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M); \end{aligned}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{\Delta 1}}{\underline{\Delta}} = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}. \quad (87)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{\Delta 2}}{\underline{\Delta}} = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}. \quad (88)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2 \cdot \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}. \quad (89)$$

Із формул (87), (88) та (89) для комплексних еквівалентних опорів першої, другої котушки та всього кола з врахуванням взаємоіндукції матимемо:

$$\underline{Z}_{1e} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M} = R_{1e} + j \cdot X_{1e}. \quad (90)$$

$$\underline{Z}_{2e} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M} = R_{2e} + j \cdot X_{2e}. \quad (91)$$

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2 \cdot \underline{Z}_M} = R_e + j \cdot X_e. \quad (92)$$

Якщо $\underline{Z}_M = 0$, то $\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$, тобто маємо відому формулу для паралельного з'єднання.

При наявності взаємоіндукції змінюються не тільки реактивні опори, але також і активні R_{1e} та R_{2e} . Із формули (91) також видно, якщо $L_1 < M$, то при узгодженому включенні у другій котушці (на відміну від послідовного з'єднання) буде спостерігатися **ефект «хибності» ємності**.

За формулам (85) побудуємо векторні діаграми струмів і напруг окремо для узгодженого і зустрічного включення.

а) узгоджене включення котушок (рис. 39)

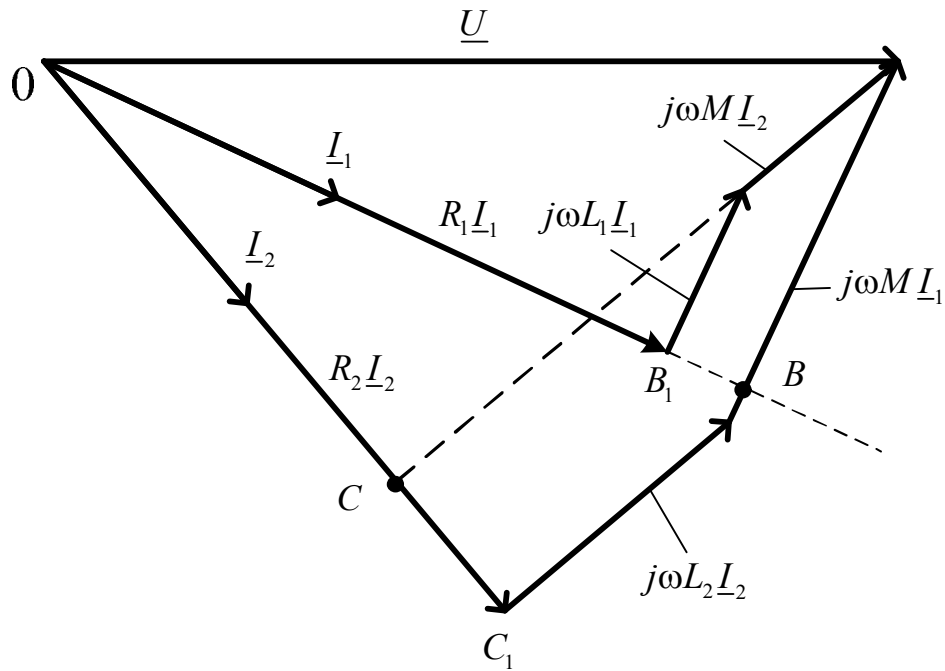


Рисунок 39 – Векторна діаграма при паралельному та узгодженому з'єднанні котушок

Як видно із приведеної векторної діаграми, відрізок $OB_1 < OB$, тобто $I_1 \cdot R_1 < I_1 \cdot R_{1e}$; $OC_1 > OC$, тобто $I_2 \cdot R_2 > I_2 \cdot R_{2e}$; відповідно маємо

$$I_1^2 \cdot R_1 < I_1^2 \cdot R_{1e}, P_{1T} < P_{1a}; \quad I_2^2 \cdot R_2 > I_2^2 \cdot R_{2e}, P_{2T} > P_{2a}.$$

Останні нерівності вказують на те, що у першу котушку надходить активна потужність від джерела енергії P_{1a} , більша ніж теплові втрати першої котушки P_{1T} . Надлишок активної потужності із першої котушки магнітним потоком передається у другу котушку, де теплові втрати P_{2T} більші ніж активна потужність P_{2a} , що надходить від джерела. Баланс активної потужності виконується: $P_{1a} + P_{2a} = P_{1T} + P_{2T}$.

б) зустрічне включення (рис. 40)

Векторну діаграму будемо у відповідності з рівнянням (85) при умові, що необхідно враховувати нижні знаки цих рівнянь

$$\underline{U} = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j \cdot \omega \cdot L_1 \cdot \underline{I}_1 - j \cdot \omega \cdot M \cdot \underline{I}_2;$$

$$\underline{U} = R_2 \cdot \underline{I}_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 \cdot \underline{I}_2 - j \cdot \omega \cdot M \cdot \underline{I}_1.$$

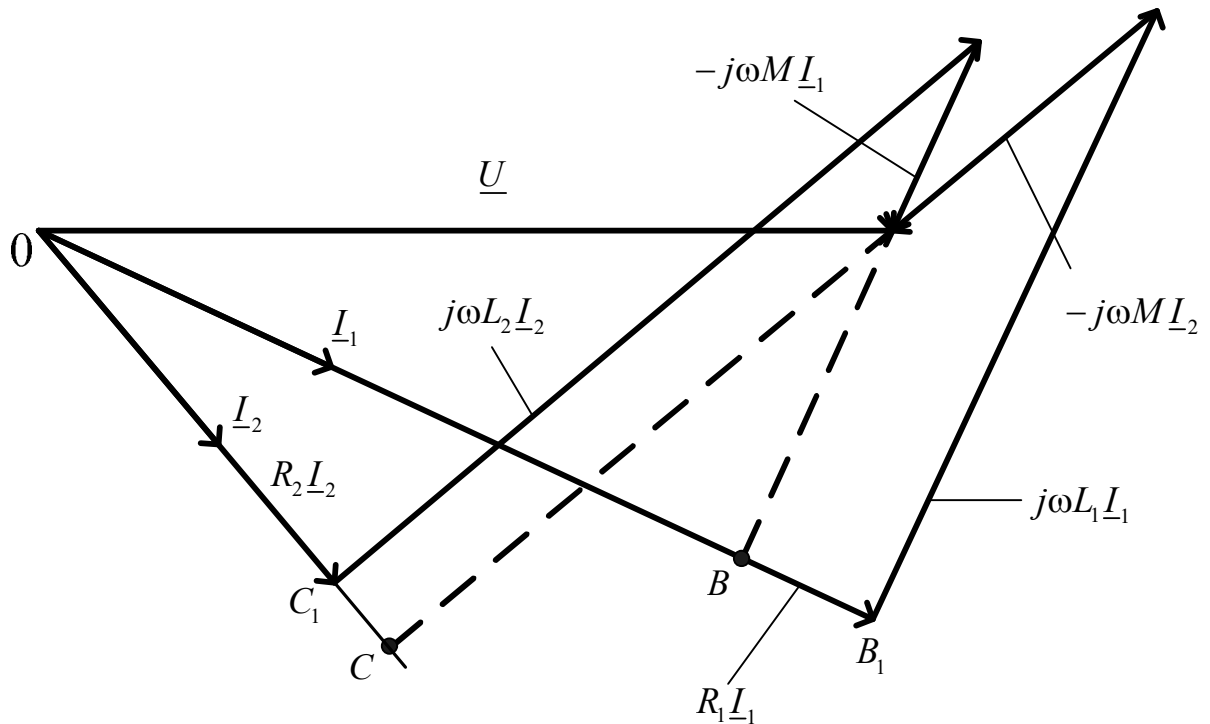


Рисунок 40 – Векторна діаграма при паралельному та зустрічному з'єднанні котушок

Як видно з векторної діаграми, відрізок $OB < OB_1$, тому $I_1 \cdot R_1 > I_1 \cdot R_{1e}$; також відрізок $OC > OC_1$, тому $I_2 \cdot R_2 < I_2 \cdot R_{2e}$. Із співвідношень для напруг впливають наступні співвідношення для потужностей

$$I_1^2 \cdot R_1 > I_1^2 \cdot R_{1e}, \quad P_{1T} > P_{1a};$$

$$I_2^2 \cdot R_2 < I_2^2 \cdot R_{2e}, \quad P_{2T} < P_{2a}.$$

Таким чином при наявності вказаних нерівностей магнітним потоком передається активна потужність з другої котушки у першу.

Баланс потужностей $P_{1a} + P_{2a} = P_{1T} + P_{2T}$ виконується.

9. 4 Баланс потужностей у електричних колах з взаємною індукцією

Нехай струми, що протікають по індуктивно зв'язаним котушкам, дорівнюють $i_1 = I_{1m} \cdot \sin(\omega t + \psi_1)$ та $i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$ (А). В комплексній формі вони мають наступний вигляд $\underline{I}_{1m} = I_{1m} \cdot e^{j\psi_1}$ та $\underline{I}_{2m} = I_{2m} \cdot e^{j\psi_2}$ (А). Під час зсуву фаз між струмами i_1 та i_2 , що відрізняється від 0 та π , від однієї котушки в магнітне поле надходить більше енергії, ніж повертається, а від другої котушки, навпаки, в магнітне поле надходить менше енергії, ніж повертається. Запишемо вираз для комплексної потужності першої котушки:

$$\begin{aligned} \boxed{S_{1M} = \underline{U}_{1M} \cdot \underline{I}_1^*} &= \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{I}_1^* = j \cdot \omega \cdot M \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{I}_1^* = j \cdot \omega \cdot M \cdot I_2 \cdot I_1 \cdot e^{j(\psi_2 - \psi_1)} = \\ &= j \cdot \omega \cdot M \cdot I_2 \cdot I_1 \cdot \cos(\psi_2 - \psi_1) - \omega \cdot M \cdot I_2 \cdot I_1 \cdot \sin(\psi_2 - \psi_1) = j \cdot Q_{1M} + P_{1M} \text{ (ВА)}; (93) \\ P_{1M} &= -\omega \cdot M \cdot I_2 \cdot I_1 \cdot \sin(\psi_2 - \psi_1) = \omega \cdot M \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \sin(\psi_1 - \psi_2) \text{ (Вт)}; \\ Q_{1M} &= \omega \cdot M \cdot I_2 \cdot I_1 \cdot \cos(\psi_2 - \psi_1) = \omega \cdot M \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos(\psi_1 - \psi_2) \text{ (Вар)}. \end{aligned}$$

Представимо активну та реактивну потужності другої котушки, що обумовлені взаємною індукцією:

$$\begin{aligned} \boxed{S_{2M} = \underline{U}_{2M} \cdot \underline{I}_2^*} &= \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_1 \cdot \underline{I}_2^* = j \cdot \omega \cdot M \cdot \underline{I}_1 \cdot \underline{I}_2^* = j \cdot \omega \cdot M \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot e^{j(\psi_1 - \psi_2)} = \\ &= j \cdot \omega \cdot M \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos(\psi_1 - \psi_2) - \omega \cdot M \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \sin(\psi_1 - \psi_2) = j \cdot Q_{2M} + P_{2M} \text{ (ВА)}; (94) \\ P_{2M} &= -\omega \cdot M \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \sin(\psi_1 - \psi_2) \text{ (Вт)}; \\ Q_{2M} &= \omega \cdot M \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos(\psi_1 - \psi_2) \text{ (Вар)}. \end{aligned}$$

Якщо $0 < \psi_1 - \psi_2 < \pi$, то $P_{1M} > 0$, а $P_{2M} < 0$ - енергія передається з активної частини кола в магнітне поле через першу котушку та повертається з поля через другу котушку. Якщо $0 < \psi_2 - \psi_1 < \pi$, то $P_{1M} < 0$, а $P_{2M} > 0$ - енергія передається з активної частини кола в магнітне поле через другу котушку та повертається з поля через першу котушку.

Оскільки $P_{1M} = -P_{2M} = \omega \cdot M \cdot I_2 \cdot I_1 \cdot \sin(\psi_1 - \psi_2) \text{ (Вт)}$ та $Q_{1M} = Q_{2M} = \omega \cdot M \cdot I_2 \cdot I_1 \cdot \cos(\psi_2 - \psi_1) = \omega \cdot M \cdot I_2 \cdot I_1 \cdot \cos(\psi_1 - \psi_2) \text{ (Вар)}$, то загальна активна потужність, що обумовлена взаємною індукцією, дорівнює

$P_{1M} - (-P_{2M}) = 0$; загальна реактивна потужність, що обумовлена взаємною індукцією, дорівнює $Q_{1M} + Q_{2M}$ та може бути як додатною так і від'ємною [9].

Рівняння енергетичного балансу у електричних колах з взаємною індукцією описується наступним виразом

$$\sum \underline{S}_\Gamma = \sum_k \underline{S}_{k\text{СП}}, \quad (95)$$

де $\sum \underline{S}_\Gamma = \sum_n \underline{E}_\Gamma \cdot \underline{I}_\Gamma^* + \sum_m \underline{U}_\Gamma \cdot \underline{J}_\Gamma^*$ – сума комплексних потужностей електричних джерел (генераторів) ЕРС E_Γ та струму J_Γ ;

$\sum_k \underline{S}_{k\text{СП}} = \sum_k (I_k^2 \cdot \underline{Z}_k) + \underline{S}_{1M} + \underline{S}_{2M}$ – сума комплексних потужностей усіх пасивних ділянок електричного кола (споживачів) та складових потужностей, що обумовлені взаємною індуктивністю.

9. 5 Еквівалентна заміна індуктивних зв'язків

Еквівалентна заміна індуктивних зв'язків або «розв'язка» кіл, що мають магнітний зв'язок, представляє собою розрахунковий шлях, суть якого полягає у введенні додаткових індуктивностей у початкову схему, щоб позбутися магнітного зв'язку між котушками [9].

Вид схеми заміщення не залежить від вибору напрямку струмів в індуктивно зв'язаних котушках, а залежить від однойменного або різнойменного з'єднання.

На рис. 41 показано «розв'язку» при з'єднанні індуктивно зв'язаних котушок у вузлі однойменними затискачами, на рис. 41,а - початкове електричне кола, а на рис. 41,б - еквівалентна схема без індуктивних зв'язків.

Необхідно розуміти, що «розв'язка» **представляє собою тільки розрахунковий прийом**, так як фізично реалізувати від'ємну індуктивність в електричному колі з лінійними елементами неможливо.

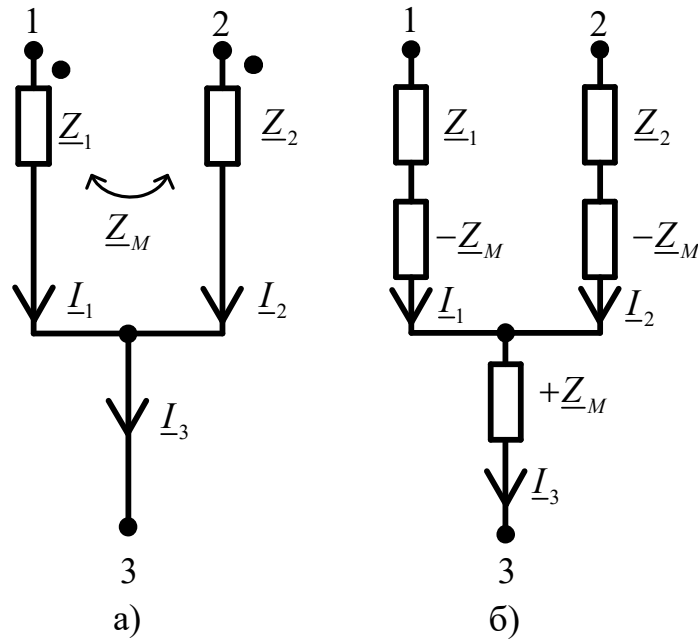


Рисунок 41 – Електрична схема при з'єднанні індуктивно зв'язаних котушок у вузлі однойменними затискачами

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_3 &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2; \\
 \underline{U}_{13} &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_2 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \cdot (\underline{I}_3 - \underline{I}_1) = (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M) \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_3; \\
 \underline{U}_{23} &= \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_1 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_M \cdot (\underline{I}_3 - \underline{I}_2) = (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_3; \\
 \underline{U}_{12} &= (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M) \cdot \underline{I}_1 - (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) \cdot \underline{I}_2.
 \end{aligned} \tag{96}$$

Якщо котушки з'єднані у загальний вузол однойменними затискачами (рис. 41, а), то послідовно до кожної котушки підключається додатковий опір « $-\underline{Z}_M$ », а у загальній вітці з'явиться додатковий опір « $+\underline{Z}_M$ » (рис. 41, б).

На рис. 42 показано «розв'язку» при з'єднанні індуктивно зв'язаних котушок у вузлі різнойменними затискачами, на рис. 42,а - початкове електричне кола, а на рис. 42,б - еквівалентна схема без індуктивних зв'язків.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_3 &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2; \\
 \underline{U}_{13} &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 - \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_2 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 - \underline{Z}_M \cdot (\underline{I}_3 - \underline{I}_1) = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M) \cdot \underline{I}_1 - \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_3; \\
 \underline{U}_{23} &= \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 - \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_1 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 - \underline{Z}_M \cdot (\underline{I}_3 - \underline{I}_2) = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M) \cdot \underline{I}_2 - \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_3; \\
 \underline{U}_{12} &= (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M) \cdot \underline{I}_1 - (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M) \cdot \underline{I}_2.
 \end{aligned} \tag{97}$$

Якщо котушки з'єднані у загальний вузол різнойменними затискачами (рис. 42, а), то послідовно до кожної котушки підключається додатковий опір « $+\underline{Z}_M$ », а у загальній вітці з'явиться додатковий опір « $-\underline{Z}_M$ » (рис. 42, б).

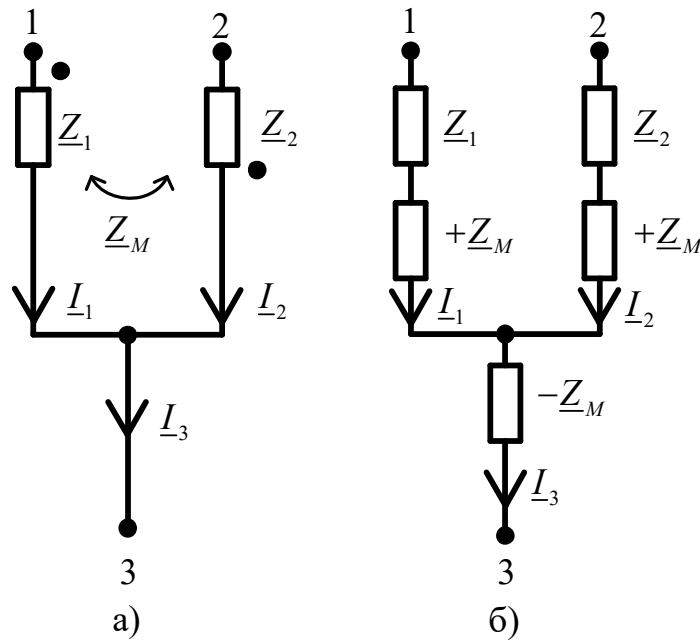


Рисунок 42 – Електрична схема при з'єднанні індуктивно зв'язаних котушок у вузлі різнойменними затискачами

Приклад 9. В електричному колі, що зображено на рис. 44, струм $\underline{I}_3 = 1$ (А). Визначити ЕРС джерела, якщо $X_{C1} = 35$ (Ом), $X_{L1} = 20$ (Ом), $X_{L2} = 60$ (Ом), $X_M = 10$ (Ом) та $R_1 = 20$ (Ом).

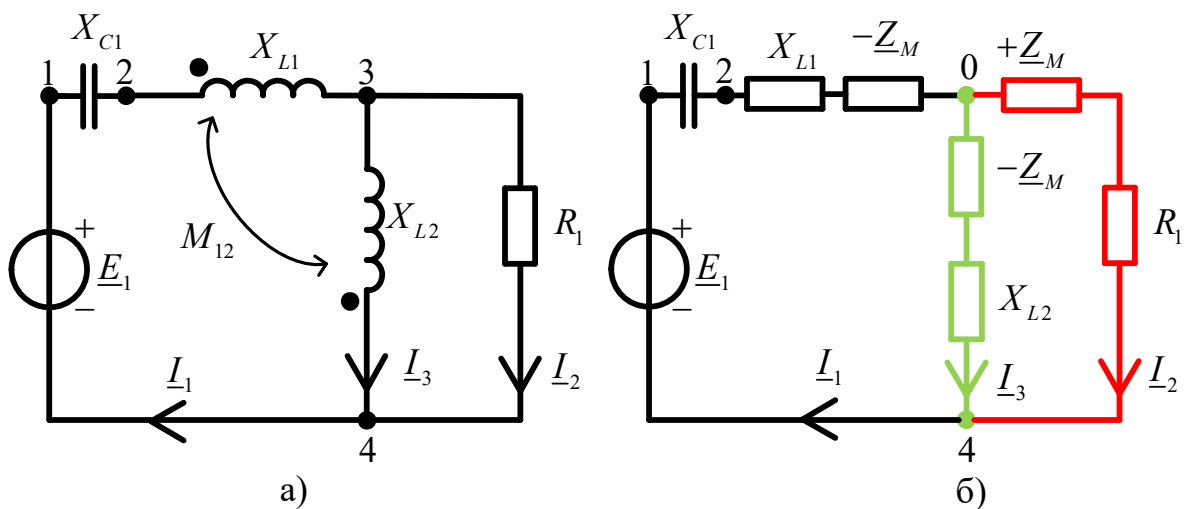


Рисунок 44 – Електрична схема

Котушки з'єднані у загальний вузол 3 однойменними затискачами відповідно отримаємо еквівалентну схему заміщення рис. 1.3 (б).

За законом Ома та Кірхгофа визначимо:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{04} &= \underline{I}_3 \cdot (j \cdot X_{L2} - j \cdot \underline{Z}_M) = 1 \cdot (j60 - j10) = j \cdot 50 (\text{В}); \\
 \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{04}}{(R_1 + j \cdot \underline{Z}_M)} = \frac{j \cdot 50}{(20 + j \cdot 10)} = 1 + j \cdot 2 (\text{А}); \\
 \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (1 + j \cdot 2) + 1 = 2 + j \cdot 2 (\text{А}); \\
 \underline{E}_1 &= (-j \cdot X_{C1} + j \cdot X_{L1} - j \cdot \underline{Z}_M) \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_{04} = \\
 &= (-j \cdot 35 + j \cdot 20 - j \cdot 10) \cdot (2 + j \cdot 2) + j \cdot 50 = \\
 &= (-j \cdot 25) \cdot (2 + j \cdot 2) + j \cdot 50 = 50 (\text{В}).
 \end{aligned} \tag{98}$$

Складемо енергетичний баланс для електричного кола, що аналізуємо:

$$\begin{aligned}
 \underline{S}_{\text{дж}} &= \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* = P_{\text{дж}} + j \cdot Q_{\text{дж}} = 50 \cdot 2.828 \angle -45^\circ = 100 - j \cdot 100 (\text{ВА}); \\
 \underline{S}_{\text{сп}} &= P_{\text{сп}} + j \cdot Q_{\text{сп}};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{сп}} &= I_2^2 \cdot R_1 = 2.236^2 \cdot 20 = 100 (\text{Вт}); \\
 Q_{\text{сп}} &= I_1^2 \cdot (-X_{C1} + X_{L1} - \underline{Z}_M) + I_2^2 \cdot \underline{Z}_M + I_3^2 \cdot (X_{L2} - \underline{Z}_M) = \\
 &= 2.828^2 \cdot (-35 + 20 - 10) + 2.236^2 \cdot 10 + 1^2 \cdot (60 - 10) = -100 (\text{Вар});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{1M} &= -\underline{Z}_M \cdot I_3 \cdot I_1 \cdot \sin(\psi_1 - \psi_3) = -10 \cdot 1 \cdot 2.828 \sin(45^\circ - 0) = -20 (\text{Вт}); \\
 P_{2M} &= \underline{Z}_M \cdot I_1 \cdot I_3 \cdot \sin(\psi_1 - \psi_3) = 10 \cdot 2.828 \cdot 1 \cdot \sin(45^\circ - 0) = 20 (\text{Вт});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{S}_{1M} &= -\underline{I}_3 \cdot j \cdot \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_1^* = -1 \cdot j \cdot 10 \cdot 2.828 \angle -45^\circ = -20 - j20 (\text{ВА}); \\
 \underline{S}_{2M} &= -\underline{I}_1 \cdot j \underline{Z}_M \cdot \underline{I}_3^* = -2.828 \angle 45^\circ \cdot j10 \cdot 1 = 20 - j20 (\text{ВА});
 \end{aligned}$$

(99)

$$\begin{aligned}
 P_{\text{сп}} &= I_2^2 \cdot R_1 + \text{Re}(\underline{S}_{1M}) + \text{Re}(\underline{S}_{2M}) = 2.236^2 \cdot 20 + (-20) + 20 = 100 (\text{Вт}); \\
 Q_{\text{сп}} &= I_1^2 \cdot (-X_{C1} + X_{L1}) + I_3^2 \cdot (X_{L2}) + \text{Im}(\underline{S}_{1M}) + \text{Im}(\underline{S}_{2M}) = \\
 &= 2.828^2 \cdot (-35 + 20) + 1^2 \cdot 60 + (-20) + (-20) = -100 (\text{Вар}).
 \end{aligned}$$

Баланс потужностей виконується, відповідно розрахунок виконано правильно. За складовими потужностей, які обумовлені взаємною

індуктивністю $P_{1M} = -20$ та $P_{2M} = 20$ (Вт), видно що енергія магнітним потоком передається від другої котушки до першої.

Розрахуємо напруги на ділянках електричного кола (рис. 44, б):

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{C1} &= \underline{I}_1 \cdot (-j \cdot X_{C1}) = 2.828 \angle 45^\circ \cdot (-j \cdot 35) = 98.995 \angle -45^\circ (\text{В}); \\
 \underline{U}_{L1} &= \underline{I}_1 \cdot j \cdot X_{L1} = 2.828 \angle 45^\circ \cdot j \cdot 20 = 56.569 \angle 135^\circ (\text{В}); \\
 \underline{U}_{M12} &= \underline{I}_1 \cdot (-j \cdot \underline{Z}_M) = 2.828 \angle 45^\circ \cdot (-j \cdot 10) = 28.284 \angle -45^\circ (\text{В}); \\
 \underline{U}_M &= \underline{I}_2 \cdot (j \cdot \underline{Z}_M) = 2.236 \angle 63.435^\circ \cdot (j \cdot 10) = 22.361 \angle 153.435^\circ (\text{В}); \\
 \underline{U}_{L2} &= \underline{I}_3 \cdot j \cdot X_{L2} = 1 \cdot j \cdot 60 = 60 \angle 90^\circ (\text{В}); \\
 \underline{U}_{M21} &= \underline{I}_3 \cdot (-j \cdot \underline{Z}_M) = 1 \cdot (-j \cdot 10) = 10 \angle -90^\circ (\text{В}); \\
 \underline{U}_{R1} &= \underline{I}_2 \cdot R_1 = 2.236 \angle 63.435^\circ \cdot 20 = 44.721 \angle 63.435^\circ (\text{В}).
 \end{aligned} \tag{100}$$

Для побудови топографічної діаграми рис. 45 знайдемо потенціали точок електричного кола:

$$\underline{\varphi}_4 = 0;$$

$$\underline{\varphi}_0 = \underline{\varphi}_4 + \underline{U}_{L2} + \underline{U}_{M21} = 0 + 60 \angle 90^\circ + 10 \angle -90^\circ = 50 \angle 90^\circ (\text{В});$$

$$\underline{\varphi}_3 = \underline{\varphi}_0 - \underline{U}_M = 50 \angle 90^\circ - 22.361 \angle 153.435^\circ = 44.721 \angle 63.435^\circ (\text{В});$$

$$\underline{\varphi}_3 = \underline{\varphi}_4 + \underline{U}_{R1} = 0 + 44.721 \angle 63.435^\circ = 44.721 \angle 63.435^\circ (\text{В});$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\varphi}_2 &= \underline{\varphi}_0 + \underline{U}_{L1} + \underline{U}_{M12} = 50 \angle 90^\circ + 56.569 \angle 135^\circ + 28.284 \angle -45^\circ = \\
 &= 72.801 \angle 105.945^\circ (\text{В});
 \end{aligned}$$

$$\underline{\varphi}_1 = \underline{\varphi}_2 + \underline{U}_{C1} = 72.801 \angle 105.945^\circ + 98.995 \angle -45^\circ = 50 (\text{В});$$

$$\underline{\varphi}_1 = \underline{\varphi}_4 + \underline{E}_1 = 0 + 50 = 50 (\text{В}).$$

(101)

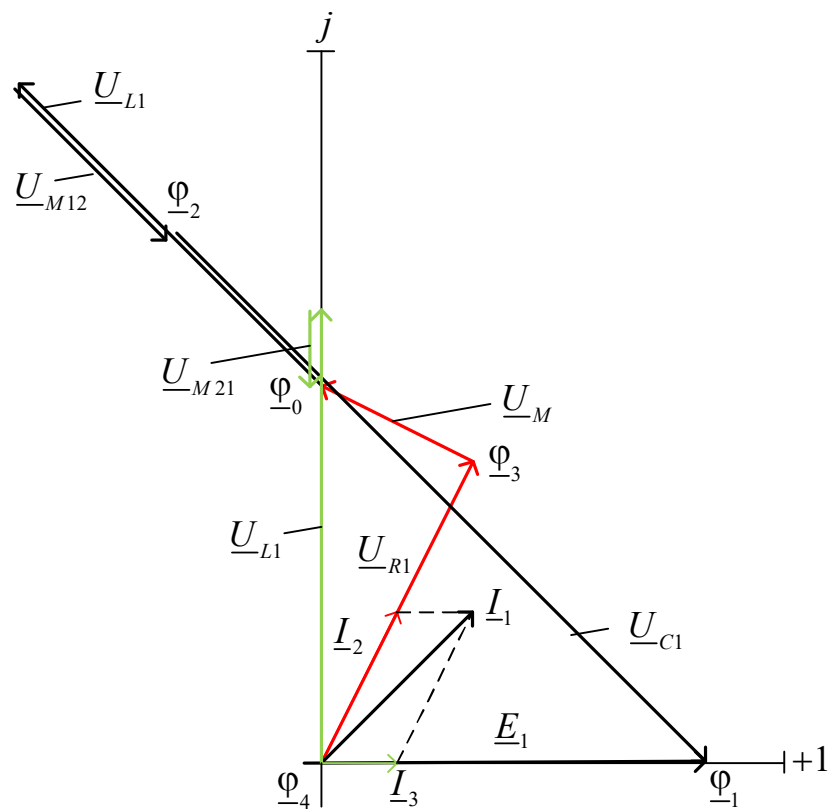


Рисунок 45 – Топографічна діаграма напруг та суміщена діаграма струмів

10 Вказівки до розрахунку чотириполюсника

Чотириполюсник – частина електричного кола довільної структури, що має два *вхідні* 1, 1' та два *вихідні* 2, 2' полюси (рис. 46). Чотириполюсники розподіляють на *активні* (позначаються літерою А), які мають внутрішні некомпенсовані джерела енергії, і *пасивні*, що не мають джерел енергії, (позначаються літерою - П).

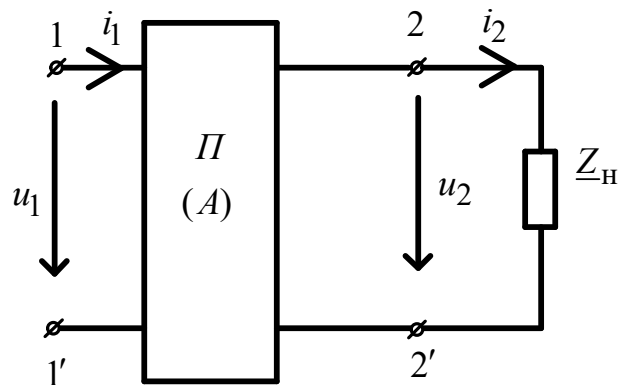


Рисунок 46 – Чотириполюсник

В режимі передачі чотириполюсник описується наступною системою рівнянь *форми А*:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 = \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2, \end{cases} \quad (102)$$

де $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ – первинні коефіцієнти чотириполюсника.

Первинні коефіцієнти чотириполюсника визначаються з дослідів неробочого ходу (НХ) та короткого замикання (КЗ). При цьому можна використовувати або значення струмів та напруг при НХ та КЗ, або опори режимів НХ та КЗ. Таких опорів є чотири. Два з них визначаються при прямому включенні чотириполюсника та позначаються \underline{Z}_{10} й $\underline{Z}_{1К}$, два інші –

при зворотному та позначаються \underline{Z}_{20} й \underline{Z}_{2K} . Всі ці опори пов'язані між собою співвідношенням

$$\frac{\underline{Z}_{1K}}{\underline{Z}_{10}} = \frac{\underline{Z}_{2K}}{\underline{Z}_{20}}. \quad (103)$$

Це співвідношення показує, що чотириполіусник характеризується трьома незалежними параметрами.

Первинні коефіцієнти чотириполіусника через опори НХ та КЗ розраховуються так:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{2K}}}; \quad \underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{Z}_{2K} \text{ (Ом);} \\ \underline{C} &= \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{10}} \text{ (См);} \quad \underline{D} = \underline{A} \cdot \frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{2K}}. \end{aligned} \quad (104)$$

Визначивши первинні коефіцієнти, можна зробити перевірку

$$\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1. \quad (105)$$

На основі рівнянь чотириполіусника можна побудувати різні схеми заміщення. На практиці частіше використовують П - та Т - подібні схеми заміщення.

Розглянемо Т - подібну схему заміщення пасивного чотириполіусника, яка зображена на рис. 47.

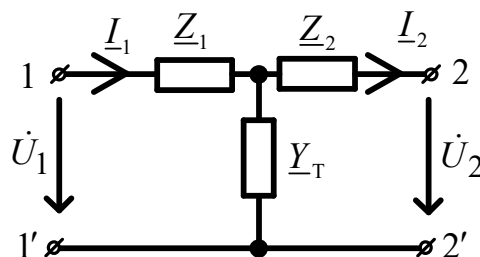


Рисунок 47 – Т- подібна схема чотириполіусника

Параметри Т - подібної схеми заміщення через первинні коефіцієнти чотириполюсника визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= \frac{\underline{A}-1}{\underline{C}} = R_1 + j \cdot X_1; \\ \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{D}-1}{\underline{C}} = R_2 + j \cdot X_2; \\ \underline{Y}_T &= \underline{C} = G_T - j \cdot B_T.\end{aligned}\tag{106}$$

*Увага! При розрахунку параметрів схеми заміщення можливий випадок, при якому активна складова одного із параметрів від'ємна. Це означає, що чотириполюсник **неможливо замінити** еквівалентною пасивною схемою заміщення.*

Первинні коефіцієнти чотириполюсника можна визначити через параметри схеми заміщення

$$\begin{aligned}\underline{A} &= 1 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Y}_T; \\ \underline{B} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 \cdot \underline{Y}_T; \\ \underline{C} &= \underline{Y}_T; \\ \underline{D} &= 1 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Y}_T.\end{aligned}\tag{107}$$

Розглянемо П - подібну схему заміщення пасивного чотириполюсника, яка зображена на рис. 48.

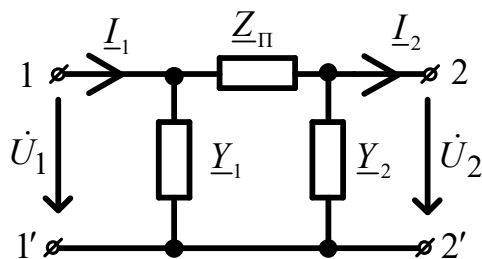


Рисунок 48 – П- подібна схема чотириполюсника

Параметри П - подібної схеми заміщення через первинні коефіцієнти чотириполюсника визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_1 &= \frac{\underline{D}-1}{\underline{B}} = G_1 - j \cdot B_1; \\
\underline{Y}_2 &= \frac{\underline{A}-1}{\underline{B}} = G_2 - j \cdot B_2; \\
\underline{Z}_{\Pi} &= \underline{B} = R_{\Pi} + j \cdot X_{\Pi}.
\end{aligned}
\tag{108}$$

Первинні коефіцієнти чотириполюсника можна визначити через параметри схеми заміщення:

$$\begin{aligned}
\underline{A} &= 1 + \underline{Z}_{\Pi} \cdot \underline{Y}_2; \\
\underline{B} &= \underline{Z}_{\Pi}; \\
\underline{C} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_2 \cdot \underline{Z}_{\Pi}; \\
\underline{D} &= 1 + \underline{Z}_{\Pi} \cdot \underline{Y}_1.
\end{aligned}
\tag{109}$$

Характеристичні опори чотириполюсника

Для будь-якого чотириполюсника існує такий опір навантаження, при якому вхідний опір чотириполюсника дорівнює навантаженню, тобто чотириполюсник, який включений між джерелом енергії та навантаженням, не змінює опір кола (*але при цьому напруга на вході чотириполюсника не дорівнює напрузі на виході*). Таке навантаження чотириполюсника зветься **узгодженим** або природним, а опір \underline{Z}_C **хвильовим опором чотириполюсника**.

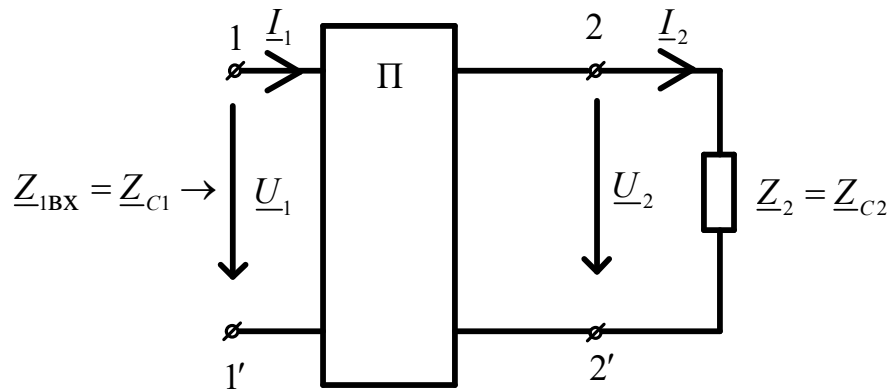
Характеристичними опорами чотириполюсника з боку вхідних (\underline{Z}_{C1}) і з боку вихідних (\underline{Z}_{C2}) полюсів називається така пара опорів, для яких виконуються умови:

1) якщо $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{C2}$, то $\underline{Z}_{1ВХ} = \underline{Z}_{C1}$ (рис. 49, а);

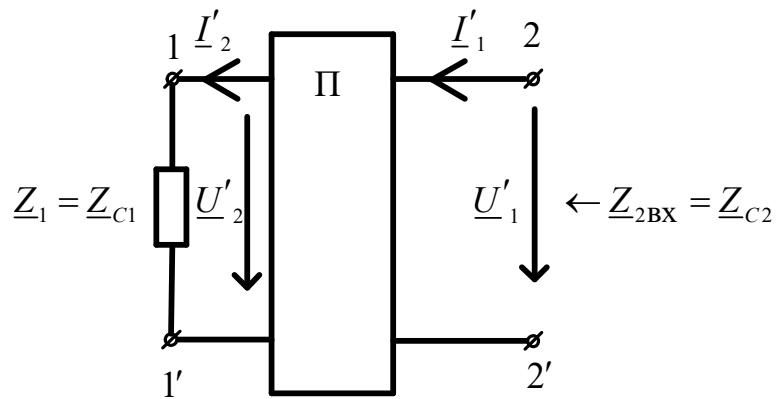
2) якщо $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{C1}$, то $\underline{Z}_{2ВХ} = \underline{Z}_{C2}$ (рис. 49, б).

Тобто

$$\underline{Z}_{C1} = \frac{\underline{A} \cdot \underline{Z}_{C2} + \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{Z}_{C2} + \underline{D}} \text{ та } \underline{Z}_{C2} = \frac{\underline{D} \cdot \underline{Z}_{C1} + \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{Z}_{C1} + \underline{A}}.$$



а)



б)

Рисунок 49 – Схеми включення чотириполюсника

Характеристичні опори визначають, використовуючи рівняння 4-полюсника для прямого та зворотного увімкнення:

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{D}}} = \sqrt{\underline{Z}_{10} \cdot \underline{Z}_{1K}}. \quad (110)$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{D} \cdot \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{A}}} = \sqrt{\underline{Z}_{20} \cdot \underline{Z}_{2K}}. \quad (111)$$

Режим роботи чотириполюсника, навантаженого характеристичним опором, називають **узгодженням на виході**.

Коли внутрішній опір джерела \underline{Z}_Γ , від якого живиться

чотириполіусник, дорівнює характеристичному опору \underline{Z}_{C1} , то кажуть, що чотириполіусник *узгоджений на вході*.

За одночасного виконання умов $\underline{Z}_Г = \underline{Z}_{C1}$ та $\underline{Z}_Н = \underline{Z}_{C2}$ чотириполіусник вважають *повністю узгодженим*.

Для повністю узгодженого чотириполіусника з активними характеристичними опорами *двічі виконується умови передачі максимальної потужності сигналу від джерела енергії до чотириполіусника та від чотириполіусника до навантаження*.

Співвідношення між характеристичними опорами:

$$\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}} = \frac{\underline{A}}{\underline{D}}; \quad \underline{Z}_{C1} \cdot \underline{Z}_{C2} = \frac{\underline{B}}{\underline{C}}. \quad (112)$$

Для симетричного чотириполіусника $\underline{A} = \underline{D}$, $\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}$.

При навантаженні симетричного чотириполіусника на характеристичний опір, його вхідний опір

$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \underline{Z}_C \quad (113)$$

повторює опір навантаження. Отже *характеристичний опір симетричного чотириполіусника є його повторним опором*.

Стала передачі (коефіцієнт поширення) чотириполіусника

Проходження сигналу через чотириполіусник визначається мірою передачі (*коефіцієнт поширення чотириполіусника* $\underline{\gamma}$), що характеризує зміну амплітуди та фази синусоїдних струмів та напругу разі проходження через чотириполіусник, який узгоджений на виході.

Коефіцієнт поширення розраховують як половину натурального логарифма відношення добутків комплексів струмів та напруг на вході та виході чотириполіусника [12]:

$$\underline{\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2} \right) \text{ або } \frac{\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2} = e^{2 \cdot \underline{\gamma}}. \quad (114)$$

Розглянемо пряму передачу узгодженого на виході пасивного чотириполіусника, для якого $\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{C1}$, $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{C2}$. У такому випадку коефіцієнт поширення:

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{\underline{I}_1^2 \cdot \underline{Z}_{C1}}{\underline{I}_2^2 \cdot \underline{Z}_{C2}} \right) = \ln \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \cdot \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} \right), \\ \underline{\gamma} &= \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{\underline{U}_1^2 \cdot \underline{Z}_{C2}}{\underline{U}_2^2 \cdot \underline{Z}_{C1}} \right) = \ln \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \cdot \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} \right). \end{aligned} \quad (115)$$

Залежність між вхідними і вихідними напругами та струмами чотириполіусника при *узгодженому* навантаженні ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_{C2}$; $\underline{Z}_{LX} = \underline{Z}_{C1}$) визначається за формулами, виведеними на основі рівнянь чотириполіусника:

$$\boxed{\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cdot \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} \cdot e^{\underline{\gamma}}; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cdot \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} \cdot e^{\underline{\gamma}}.} \quad (116)$$

де $e^{\underline{\gamma}} = \sqrt{\underline{A} \cdot \underline{D}} + \sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}}$, $\underline{\gamma}$ – *стала передачі* (комплексна величина) – характеризує передачу енергії через чотириполіусник в узгодженому режимі.

$$\begin{aligned} e^{\underline{\gamma}} &= \frac{\underline{I}_2 \cdot (\underline{C} \cdot \underline{Z}_{C2} + \underline{D})}{\underline{I}_2} \cdot \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}}, \\ \boxed{\underline{\gamma} = \ln(\sqrt{\underline{A} \cdot \underline{D}} + \sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}}) = \alpha + j \cdot \beta}. \end{aligned} \quad (117)$$

Дійсна частина α сталої передачі - *коефіцієнт згасання* характеризує зміну діючого значення напруги U_2 чи струму I_2 на виході чотириполюсника щодо діючого значення напруги U_1 чи струму I_1 на вході в узгодженому режимі.

Уявна частина β - *коефіцієнт фази*, дорівнює куту зсуву фаз напруги чи струму на виході чотириполюсника відносно фаз напруги чи струму на його вході.

Оскільки під коренем стоїть добуток коефіцієнтів \underline{A} та \underline{D} , доходимо важливого висновку, що *коефіцієнт передачі чотириполюсника не залежить від напрямку передачі сигналу через нього*.

Враховуючи, що у симетричному чотириполюснику $\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C$

$$\underline{\gamma} = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2} = \ln(\sqrt{\underline{A} \cdot \underline{D}} + \sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}}). \quad (118)$$

Коефіцієнт поширення розраховується через комплекси вхідної та вихідної напруги наступним чином:

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \ln \left(\frac{U_1 \cdot e^{j \cdot \psi_{u1}}}{U_2 \cdot e^{j \cdot \psi_{u2}}} \right) = \ln \left(\frac{U_1}{U_2} \cdot e^{j \cdot (\psi_{u1} - \psi_{u2})} \right) = \ln \left(\frac{U_1}{U_2} \right) + \ln \left(e^{j \cdot (\psi_{u1} - \psi_{u2})} \right) = \\ &= \boxed{\ln \frac{U_1}{U_2}} + j \cdot (\psi_{u1} - \psi_{u2}) = \boxed{\alpha} + j \cdot \beta; \\ \underline{\gamma} &= \boxed{\ln \frac{I_1}{I_2}} + j \cdot (\psi_{i1} - \psi_{i2}) = \boxed{\alpha} + j \cdot \beta. \end{aligned} \quad (119)$$

Дійсна частина коефіцієнта поширення $\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}$ - *коефіцієнт*

згасання або власне згасання чотириполюсника. Уявна частина коефіцієнта поширення $\beta = (\psi_{u1} - \psi_{u2}) = (\psi_{i1} - \psi_{i2})$, яка є кутом зсуву за фазою між напругами чи струмами на вході та виході в узгодженому режимі - *коефіцієнт фази* чотириполюсника (рад або градус).

Сума двох значень коефіцієнтів згасання дорівнює:

$$2\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} + \ln \frac{I_1}{I_2} = \ln \frac{U_1 \cdot I_1}{U_2 \cdot I_2} = \ln \frac{S_1}{S_2};$$

$$e^{2\alpha} = \frac{P_1}{P_2}. \quad (120)$$

Згасання вимірюється в логарифмічних одиницях.

1. На основі натуральних логарифмів

$$\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2}; \text{ якщо } \alpha = 1 \text{ то } \frac{U_1}{U_2} = e^\alpha = e^1 = 2.718. \text{ Тобто, якщо } U_2 \text{ менше від}$$

U_1 в $e=2.718$ раз, то згасання дорівнює 1 Непер, $\alpha = 1$ (Нп)

2. На основі десяткових логарифмів

$$\alpha = \log \frac{P_1}{P_2} = 2 \cdot \log \frac{U_1}{U_2} = 2 \cdot \log \frac{I_1}{I_2}; \text{ якщо } \alpha = 1, \text{ то } \frac{P_1}{P_2} = 10, \text{ або } \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = \sqrt{10}.$$

Тобто, якщо потужності входу і виходу чотириполюсника відрізняються в 10 раз, то згасання дорівнює 1 (Бел) = 10 (дециБел), $\alpha = 1$ (Б) = 10(дБ).

Співвідношення між одиницями:

$$\alpha(\text{дБ}) = 20 \cdot \log \frac{U_1}{U_2} = 20 \cdot \frac{\ln \frac{U_1}{U_2}}{\ln 10} = 8.686 \cdot \alpha(\text{Нп}).$$

$$1 (\text{Нп}) = 8.69 (\text{дБ}); 1(\text{дБ}) = 0.115(\text{Нп}).$$

Характеристичні опори і стала передачі ($\underline{Z}_{C1}, \underline{Z}_{C2}, \underline{\gamma}$) називаються вторинними параметрами чотириполюсника.

Приклад 10. Аналіз пасивного чотириполюсника представлено у Додатку А (розділ 3).

11 Завдання до розрахунково-графічної роботи

«АНАЛІЗ ОДНОФАЗНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ»

При проходженні змінного струму через котушку індуктивності у ній виникає ЕРС самоіндукції $e_L = -L \frac{di}{dt}$, яка урівноважується напругою $u_L = -e_L$. Реакцію індуктивності на синусоїдний струм враховують в обрахунках реактивним індуктивним опором $X_L = \omega \cdot L$. При впливі змінної напруги на ємність через неї проходить струм зміщення $i_C = C \frac{du_C}{dt}$. Реакцією ємності на синусоїдну напругу враховують реактивним ємнісним опором $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$.

В електричному колі (рис. 50 та рис. 51) діє джерело синусоїдної ЕРС $e = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \psi)$. Всі параметри кола наведені в таблицях №2 та №3.

I Для електричного кола без взаємної індукції:

- а) розрахувати всі струми комплексним методом, *визначити показ вольтметра*;
- б) скласти баланс активних P та реактивних Q потужностей кола;
- в) побудувати векторну діаграму струмів та топографічну діаграму напруг;
- г) прийняти опір $R_2 = 0$ та, вважаючи реактивний опір цієї вітки невідомим, визначити його за умовою резонансу струмів;
- д) розрахувати струми кола під час резонансу, *визначити показ вольтметра*;
- є) перевірити правильність розрахунків за балансом потужностей;
- ж) видаливши із кола активні опори, записати частотну характеристику (ЧХ) вхідного опору кола та побудувати її, знайшовши нулі і полюси.

Увага! Активні опори віток, з'єднані паралельно з ємністю чи індуктивністю розірвати ($R = \infty$), всі інші замінити перемичкою ($R = 0$).

II За наявності магнітного зв'язку між індуктивними елементами L_1, L_2 (однойменні кінці елементів відмічені на схемі крапками):

а) перетворивши схему до двох незалежних контурів, розрахувати струми у всіх вітках схеми методом контурних струмів, визначити показ вольтметра;

б) перевірити правильність розрахунків за балансом потужностей, визначити активну та реактивну потужності магнітного зв'язку для кожної з індуктивно-зв'язаних котушок;

в) побудувати векторну діаграму струмів і топографічну діаграму напруг (на діаграмі показати напруги взаємної індукції).

II Відкинувши крайню вітку між полюсами 2–2', зробити розв'язок магнітного зв'язку. Одержану схему розглядати як чотириполюсник з полюсами 1–1' та 2–2':

а) розрахувати коефіцієнти чотириполюсника A, B, C, D ;

б) визначити ЕРС та струм I_1 на вході чотириполюсника, за яких на його виході напруга $U_2 = 100(B)$, струм $I_2 = 1(A)$, а кут зсуву фаз між синусоїдами напруги та струму $\varphi_2 = 30^\circ$. Зробити перевірку, навантаживши чотириполюсник на відповідний опір;

в) розрахувати параметри R, L, C віток (T або Π) схеми заміщення;

г) визначити вторинні параметри чотириполюсника (характеристичні опори $\underline{Z}_{C1}, \underline{Z}_{C2}$, сталу передачі $\underline{\gamma}$);

д) в узгодженому режимі чотириполюсника за вторинними параметрами визначити комплекси напруги \underline{U}_2 та струму \underline{I}_2 (на виході чотириполюсника) при заданій ЕРС на вході. Зробити перевірку для схеми заміщення.

Увага!

1. *Параметри елементів кола нанести на електричну схему.*
2. *Схеми та діаграми виконувати відповідно до правил ЄСКД та ДСТУ.*
3. *Всі розрахунки давати у такому порядку: формула (у літерах), - чисельні дані, - відповідь в одиницях виміру.*
4. *Всі кінцеві вирази для комплексів давати в алгебраїчній та показниковій формах.*

Примітка. Варіант даних для розрахунку вибрати згідно з тризначним шифром (№1, №2, №3). Перша цифра відповідає номеру колонки таблиці №3, друга - номеру колонки таблиці №4, третя - номеру схеми рис. 2.

Шифр задається викладачем.

Таблиця 2 – Значення параметрів

Параметр	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E , (В)	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280
ψ , (град.)	-20	-30	-45	-60	25	35	50	70	80	90
R_1 , (Ом)	5	7	9	11	12	14	16	18	20	22
R_2 , (Ом)	7	9	11	13	10	12	14	16	18	21
R_3 , (Ом)	9	11	13	15	8	10	12	14	16	6
R_4 , (Ом)	12	13	15	17	6	8	10	12	11	19

Таблиця 3 – Значення параметрів

Параметр	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
X_{L1} , (Ом)	30	35	40	45	50	40	55	60	45	37
X_{L2} , (Ом)	35	40	45	50	40	35	45	50	30	27
X_{L3} , (Ом)	40	45	50	55	35	25	30	43	25	20
X_{C1} , (Ом)	10	15	20	25	20	15	17	20	15	13
X_{C2} , (Ом)	15	20	25	30	15	10	13	15	12	10
X_{C3} , (Ом)	20	25	30	35	12	8	10	13	8	6
X_{μ} , (Ом)	20	23	25	27	30	20	22	32	20	15
f , (Гц)	50	60	50	60	100	50	60	100	60	50
Тип схеми заміщення	Т	П	Т	П	Т	П	Т	П	Т	П

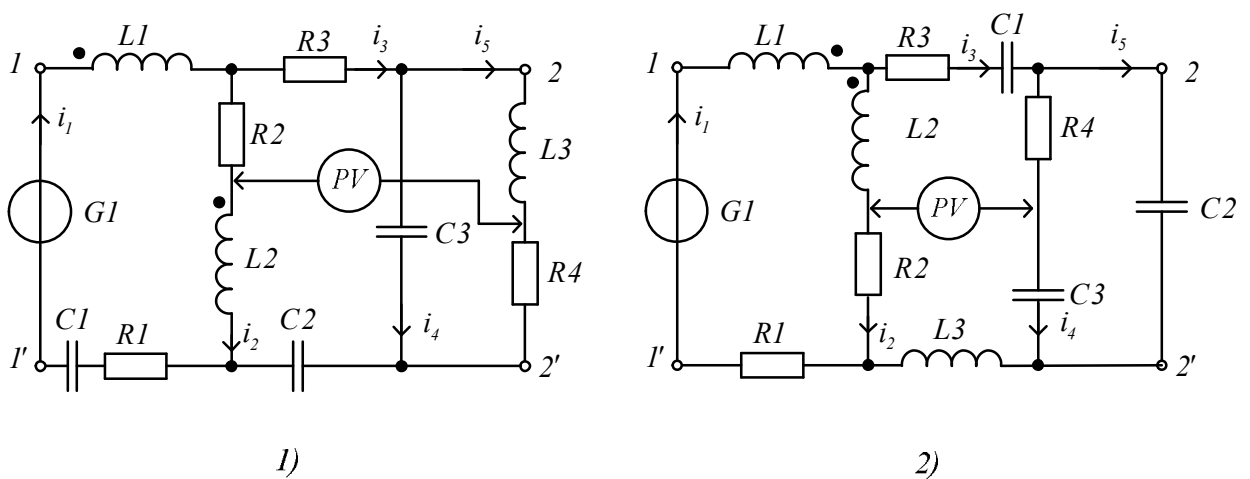


Рисунок 50 – Однофазні електричні кола синусоїдного струму

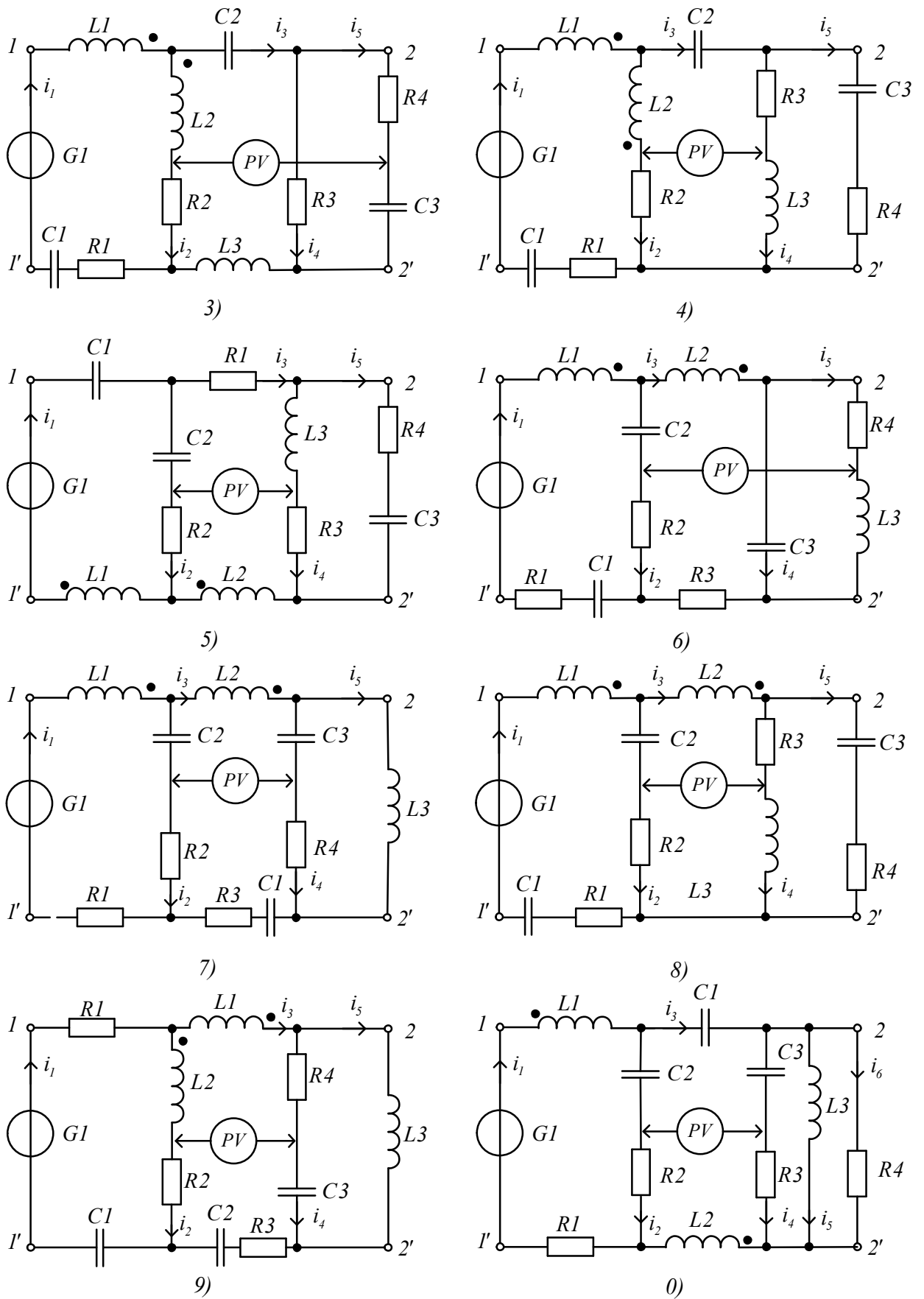


Рисунок 51 – Однофазні електричні кола синусоїдного струму

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. ДСТУ 2843-94 Електротехніка. Основі поняття. Терміни та визначення. – Чинний від 01.01.1996. – Київ: Держстандарт України, 1995 – 68 с.
2. Бурик М.П. Лінійні електричні кола постійного струму: Розрахунково-графічна робота[Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», спеціалізацій «Електромеханічні системи автоматизації та електропривод», «Електричні машини і апарати», «Інжиніринг та автоматизація електротехнічних комплексів» й «Мехатроніка енергоємних виробництв» / М.П. Бурик, Л.Ю. Спінул ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,51 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 46 с.
3. Касаткин А.С. Электротехника: Учеб. Для вузов / А.С. Касаткин, М.В. Немцов // 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 544 с.
4. Курило І.А. Розрахунок електричних кіл синусоїдного однофазного струму / І.А. Курило, І.Н. Намацалюк, А.А. // Метод. вказівки до виконання розрахункових робіт з курсу “Теоретична електротехніка” для студ. напрямів підготовки 0906 “Електротехніка”, 0914 “Електроніка”, 0914 “Компютеризовані системи, автоматика і управління”, 0915 “Компютерна інженерія”. – К.: НТУУ “КПІ”, 2004.- 72 с.
5. Усатенко С.Т. Выполнение электрических схем по ЕСКД: Справочник / С.Т. Усатенко, Т.К. Каченюк, М.В. Терехова. – М.: Издательство стандартов, 1989. – 325 с.
6. Шебес М.Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах / М.Р. Шебес // Учебное пособие для электротехнич. и радиотехнич. специальностей вузов. – М.: «Высшая школа», 1973. – 656 с.

7. Иванов В.А. Математические основы теории автоматического регулирования. Учеб. Пособие для вузов. Под ред. Б.К. Чемоданова. – М.: высшая школа, 1971. – 808 с.
8. Чиженко И. М Методические указания та расчетно-графические задания по курсу ТОЭ «Расчет линейной цепи однофазного синусоидального тока» для студентов всех специальностей / Сост. И.М. Чиженко, В.С. Бойко, Е.А. Кудря, А.А. Шуляк. – К.: КПИ, 1990.-55 с.
9. Глухов Д.Я. Методические указания к самостоятельной работе по курсу «Электротехника и основы электроники» для студентов неэлектрических специальностей вечерней и дневной форм обучения / Д.Я. Глухов, В.П. Грудская, Н.Е. Кучеренко // Раздел «Взаимная индукция в цепях переменного тока». – К.: КПИ, 1990. – 32 с.
10. Нейман Л.Р. Теоритические основы электротехники / Л.Р. Нейман, К.С. Демирчан // В 2-х т. Учебник для вузов. Том 1. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергоиздат. Ленингр. Отд-ние, 1981. – 536 с.
11. Бердинских Г.С. Методические указания и контрольные задания по ТОЭ для студентов ОТФ «Линейные электрические цепи синусоидального тока» / Сост. Г.С. Бердинских, Е.А. Кудря, Л.А. Войтех, А.А. Шуляк. – К.: КПИ, 1985.-40 с.
12. Бойко В.С. Теоретичні основи електротехніки / В.С. Бойко, В.В. Бойко, Ю.Ф. Видолоб та ін.; За заг. ред. І.М. Чиженка, В.С. Бойка. // Підручник: У 3 т. Том 1: Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. – К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2004. – 272 с

Додаток А

ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Факультет електроенерготехніки та автоматики
Кафедра теоретичної електротехніки

РОЗРАХУНКОВА-ГРАФІЧНА РОБОТА

з навчальної компоненти "Теоретичні основи електротехніки - 1"
на тему: "ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ОДНОФАЗНОГО
СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ"

Варіант №012

Виконав студент групи ЕД - 01 Петров М.М.

(підпис)

Перевірив

(підпис)

КИЇВ – 20__ р.

ЗМІСТ

	стор.
Завдання на самостійну роботу.....	101
1 Розрахунок струмів в електричному колі без взаємної індукції між індуктивними котушками комплексним методом.....	102
1.1 Визначення показу вольтметра електромагнітної системи.....	106
1.2 Баланс активних P та реактивних Q потужностей кола.....	108
1.3 Суміщена векторна діаграма струмів та топографічна діаграма напруг.....	109
1.4 Резонансний режим в електричному колі.....	113
1.4.1 Розрахунок струмів в електричному колі у резонансному режимі.....	115
1.4.2 Визначення показу вольтметра при резонансі струмів в електричному колі.....	117
1.4.3 Баланс активних та реактивних потужностей при резонансі струмів в електричному колі.....	118
1.4.4 Суміщена векторна діаграма струмів та топографічна діаграма напруг при резонансі струмів в електричному колі.....	119
1.5 Частотна характеристика вхідного опору електричного кола.....	123
2 Розрахунок струмів комплексним методом електричного кола при наявності магнітного зв'язку між індуктивними елементами.....	128
2.1 Визначення показу вольтметра в електричному колі з взаємною індукцією.....	132
2.2 Баланс активних та реактивних потужностей в електричному колі з взаємною індукцією.....	133
2.3 Суміщена векторна діаграма струмів та топографічна діаграма напруг для електричного кола з взаємною індукцією.....	135
3 Аналіз пасивного чотириполюсника.....	139
3.1 Розрахунок параметрів пасивного чотириполюсника.....	139
3.2 Визначення коефіцієнтів чотириполюсника A, B, C, D	140

3.3 Визначення ЕРС та струму I_1 на вході чотириполюсника, якщо напруга на його виході $U_2 = 100(B)$, струм $I_2 = 1(A)$, а кут зсуву фаз між синусоїдами напруги та струму $\varphi_2 = 30^\circ$	144
3.4 Розрахунок параметрів R, L, C віток Т-схеми заміщення	146
3.5 Визначення вторинних параметрів чотириполюсника	147
3.6 Визначити значення напруги \underline{U}_2 та струму \underline{I}_2 при заданій ЕРС на вході в узгодженому режимі чотириполюсника за вторинними параметрами	147
Висновки	148
Бібліографічний список використаної літератури	149

ЗАВДАННЯ НА САМОСТІЙНУ РОБОТУ

Відповідно до тризначного шифру варіанта №012 розрахунково-графічної роботи [] вибираємо задану електричну схему з номером 2, яка представлена на рис. А.1 згідно до правил ЄСКД та ДСТУ. В цьому електричному колі діє джерело синусоїдної ЕРС

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega \cdot t + \psi_{e_1}) = \sqrt{2} E_1 \sin(2\pi f \cdot t + \psi_{e_1}) = \sqrt{2} E_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \psi_{e_1}\right) \quad (\text{A.1})$$

де E_{1m} – амплітуда ЕРС, В;

E_1 – діюче значення ЕРС, В;

$f = \frac{1}{T}$ – лінійна частота, яка дорівнює числу коливань за 1 с;

$\omega = 2\pi f$ – кутова частота, рад/с; ψ_{e_1} – початкова фаза ЕРС, градус.

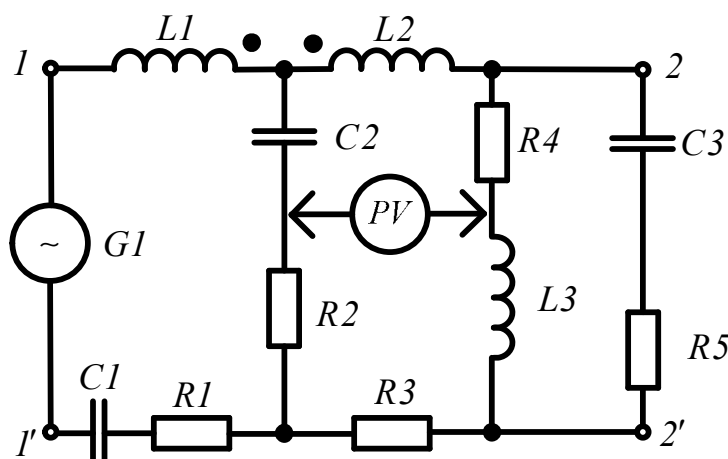


Рисунок А.1 – Електричне коло однофазного синусоїдного струму

Параметри електричного кола, значення активних та реактивних опорів, тип схеми заміщення, діюче значення ЕРС e_1 та її початкова фаза наведені в табл. 2 та 3 []: $E_1 = 230(\text{В})$, $\psi_{e_1} = 120^\circ$, $R_1 = 8(\text{Ом})$, $R_2 = 10(\text{Ом})$, $R_3 = 12(\text{Ом})$, $R_4 = 14(\text{Ом})$, $R_5 = 15(\text{Ом})$, $X_{L1} = 20(\text{Ом})$, $X_{L2} = 25(\text{Ом})$, $X_{L3} = 30(\text{Ом})$, $X_{C1} = 30(\text{Ом})$, $X_{C2} = 20(\text{Ом})$, $X_{C3} = 10(\text{Ом})$, $X_\mu = 25(\text{Ом})$, $f = 50(\text{Гц})$, тип схеми заміщення - Т.

1 Розрахунок струмів в електричному колі без взаємної індукції між індуктивними котушками комплексним методом

У вітках електричної схеми (рис. А.1) вказуємо напрямки відліку позитивних величин синусоїдних струмів i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 та зображаємо їх на рис. А.2.

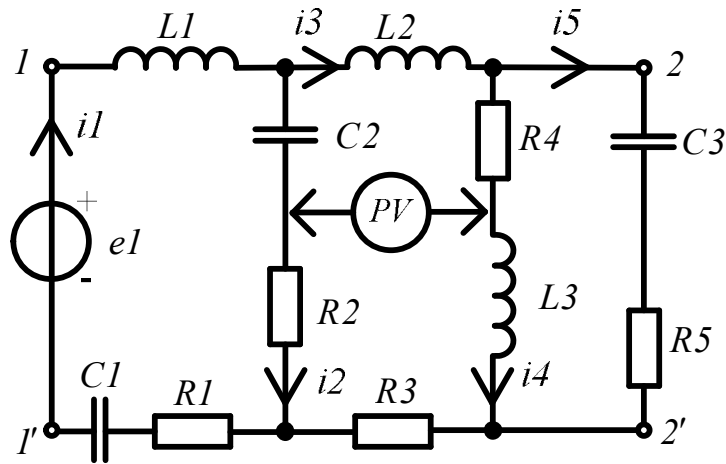


Рисунок А.2 – Електричне схема

Застосуємо символічний метод розрахунку для визначення струмів та напруг на ділянках простого електричного кола. Для цього перетворимо задану електричну схему на еквівалентну схему в комплексному вигляді, яка представлена на рис. А.3.

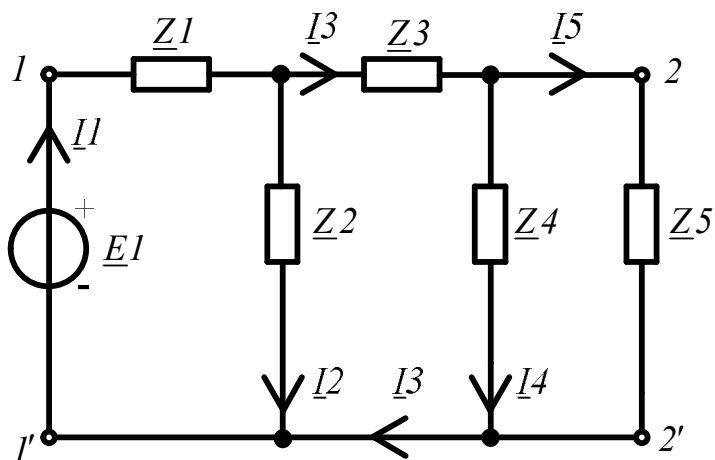


Рисунок А.3 – Комплексна еквівалентна схема електричного кола

Позначимо уявну одиницю літерою $j = \sqrt{-1}$ та запишемо миттєве значення ЕРС й опори віток електричного кола за допомогою комплексних чисел. Застосуємо алгебраїчну, показникову та полярну форми запису чисел для зручності обробки результатів і побудови векторних діаграм.

Запишемо ЕРС E_1 у комплексній формі:

$$\underline{E}_1 = E_1 \cdot e^{j \cdot \psi_{e1}} = 230 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} = -115 + j \cdot 199.186 = 230 \angle 120^\circ (В).$$

Комплекси опорів віток еквівалентної схеми дорівнюють:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j \cdot X_{L1} - j \cdot X_{C1} = 8 + j \cdot 20 - j \cdot 30 = 8 - j \cdot 10 = 12.806 \angle -51.34^\circ (Ом);$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j \cdot X_{C2} = 10 - j \cdot 20 = 22.361 \angle -63.435^\circ (Ом);$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j \cdot X_{L2} = 12 + j \cdot 25 = 27.731 \angle 64.359^\circ (Ом);$$

$$\underline{Z}_4 = R_4 + j \cdot X_{L3} = 14 + j \cdot 30 = 33.106 \angle 64.983^\circ (Ом);$$

$$\underline{Z}_5 = R_5 - j \cdot X_{C3} = 16 - j \cdot 10 = 18.868 \angle -32.005^\circ (Ом).$$

Проведемо еквівалентне перетворення пасивної частини електричного кола, згортаючи його до одного загального комплексного опору. Запишемо еквівалентний опір паралельного з'єднання комплексних опорів \underline{Z}_4 та \underline{Z}_5 :

$$\underline{Z}_{45} = \frac{\underline{Z}_4 \cdot \underline{Z}_5}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = \frac{33.106 e^{j 64.983^\circ} \cdot 18.868 e^{j (-32.005^\circ)}}{33.106 e^{j 64.983^\circ} + 18.868 e^{j (-32.005^\circ)}} = 17.323 - j \cdot 0.215 = 17.324 \angle -0.712^\circ (Ом).$$

Представимо перетворене електричне коло на рис. А.4.

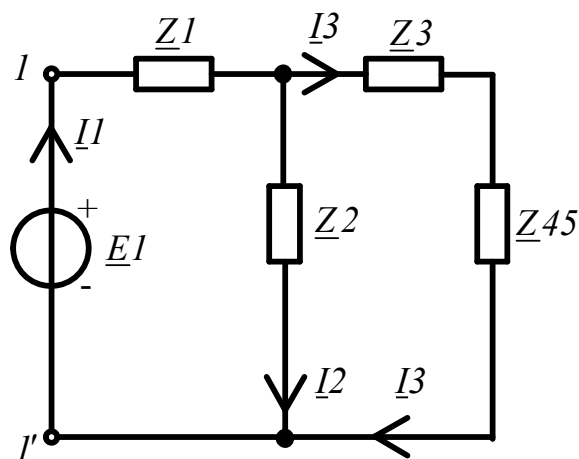


Рисунок А.4 – Еквівалентна схема

Опори \underline{Z}_3 та \underline{Z}_{45} з'єднані послідовно, тому еквівалентний опір дорівнює:

$$\underline{Z}_{345} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{45} = (12 + j \cdot 25) + (17.323 - j \cdot 0.215) = 29.323 + j \cdot 24.785 = 38.394 \angle 40.205^\circ (\text{Ом}). \quad (\text{A.3})$$

Комплексна еквівалентна схема електричного кола зміниться до наступного вигляду (рис. А.5).

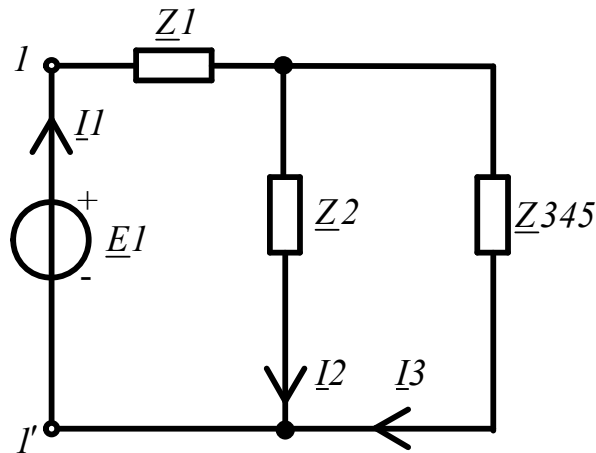


Рисунок А.5 – Еквівалентна схема

Опори \underline{Z}_2 та \underline{Z}_{345} з'єднані паралельно, тому еквівалентний опір дорівнює:

$$\underline{Z}_{2345} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_{345}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{345}} = \frac{22.361 e^{j(-63.435^\circ)} \cdot 38.394 e^{j(40.205^\circ)}}{22.361 e^{j(-63.435^\circ)} + 38.394 e^{j(40.205^\circ)}} = 18.737 - j \cdot 10.891 = 21.673 \angle -30.167^\circ (\text{Ом}). \quad (\text{A.4})$$

Наведемо еквівалентну схему для цього перетворення на рис. А.6. Опори \underline{Z}_1 та \underline{Z}_{2345} з'єднані послідовно, тому загальний еквівалентний опір усього кола визначається за формулою:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{2345} = (8 - j \cdot 10) + (18.737 - j \cdot 10.891) = (26.737 - j \cdot 20.891) = 33.931 \angle -38.002^\circ (\text{Ом}). \quad (\text{A.5})$$

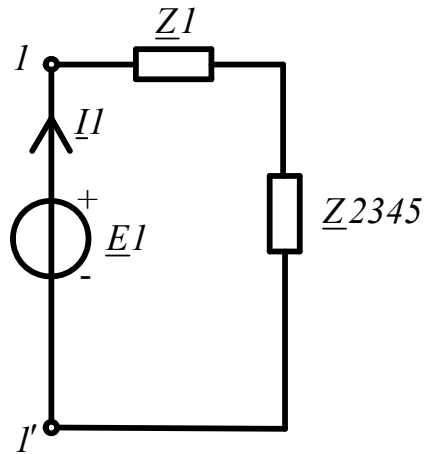


Рисунок А.6 – Еквівалентна схема

На рис. А.7 наведено результуючу просту еквівалентну схему в комплексній формі

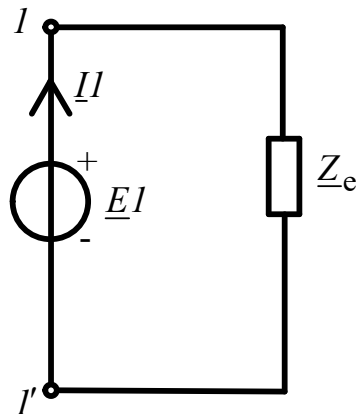


Рисунок А.7 – Еквівалентна схема

Визначимо струм \underline{I}_1 за законом Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_e} = \frac{230 \cdot e^{j \cdot 120^\circ}}{33.931 e^{j(-38.002^\circ)}} = (-6.285 + j \cdot 2.539) = 6.778 \angle 158.002^\circ (A). \quad (A.5)$$

За правилом «Чужого плеча» знаходимо значення струму \underline{I}_2 .

Еквівалентна схема для цього розрахунку представлена на рис. А.5.

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_{345}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{345}} = 6.778 \angle 158.002^\circ \cdot \frac{38.394 e^{j(40.205^\circ)}}{22.361 e^{j(-63.435^\circ)} + 38.394 e^{j(40.205^\circ)}} =$$

$$= -6.443 - j \cdot 1.284 = 6.57 \angle -168.73^\circ (A). \quad (A.6)$$

За першим законом Кірхгофа у комплексній формі визначаємо струм \underline{I}_3 :

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = (-6.285 + j \cdot 2.539) - (-6.443 - j \cdot 1.284) =$$

$$= 0.158 + j \cdot 3.823 = 3.826 \angle 87.63^\circ (A). \quad (A.7)$$

Проведемо аналогічні дії для знаходження струмів \underline{I}_4 та \underline{I}_5 . За правилом «Чужого плеча» знаходимо значення струму \underline{I}_4 . Еквівалентна схема для цього розрахунку представлена на рис. А.3.

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_3 \cdot \frac{\underline{Z}_5}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = 3.826 e^{j87.63^\circ} \cdot \frac{18.868 e^{j(-32.005^\circ)}}{33.106 e^{j64.983^\circ} + 18.868 e^{j(-32.005^\circ)}} =$$

$$= 1.857 + j \cdot 0.748 = 2.002 \angle 21.934^\circ (A). \quad (A.8)$$

За першим законом Кірхгофа у комплексній формі визначаємо струм \underline{I}_5 :

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_3 - \underline{I}_4 = (0.158 + j \cdot 3.823) - (1.857 + j \cdot 0.748) =$$

$$= -1.699 + j \cdot 3.075 = 3.513 \angle 118.923^\circ (A). \quad (A.9)$$

1.1 Визначення показу вольтметра електромагнітної системи

Візьмемо за опорний вузол точку h , тобто електричний потенціал $\varphi_h = 0$. Розрахуємо електричний потенціал точки φ_e , який зображений на рис. А.8, за двома шляхами. Перший шлях проходить через елементи електричного коло $R_4 \rightarrow L_2 \rightarrow C_2$, тому φ_e визначається за виразом:

$$\begin{aligned}
\varphi_e &= \varphi_h + \underline{I}_4 \cdot R_4 + \underline{I}_3 \cdot j \cdot X_{L2} - \underline{I}_2 \cdot (-j \cdot X_{C2}) = \\
&= 0 + 2.002 \angle 21.934^\circ \cdot 14 + 3.826 \angle 87.63^\circ \cdot j \cdot 25 + \dots \quad (A.10) \\
&\dots - 6.57 \angle -168.73^\circ \cdot (-j \cdot 20) = \\
&= -43.893 - j \cdot 114.436 = 122.565 \angle -110.985^\circ (B).
\end{aligned}$$

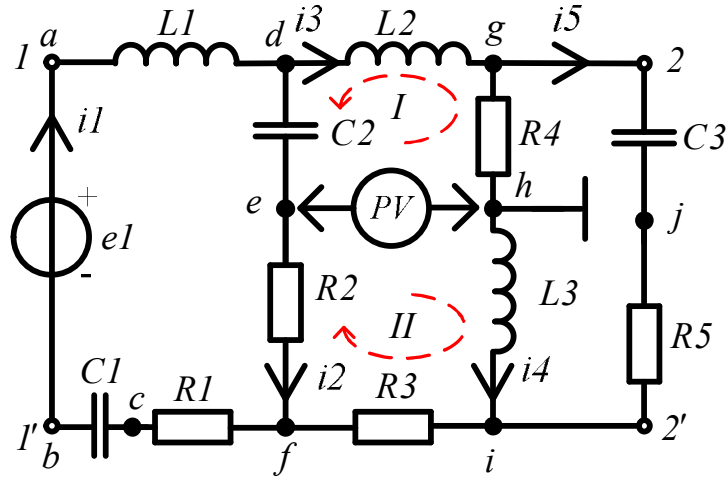


Рисунок А.8 – Електричне схема

Другий шлях проходить через елементи електричного кола $L_3 \rightarrow R_3 \rightarrow R_2$. Електричний потенціал φ_e розрахуємо за формулою:

$$\begin{aligned}
\varphi_e &= \varphi_h - \underline{I}_4 \cdot j \cdot X_{L3} - \underline{I}_3 \cdot R_3 + \underline{I}_2 \cdot R_2 = \\
&= 0 - 2.002 \angle 21.934^\circ \cdot j \cdot 30 - 3.826 \angle 87.63^\circ \cdot 12 + \dots \quad (A.11) \\
&\dots + 6.57 \angle -168.73^\circ \cdot 10) = -43.893 - j \cdot 114.436 = \\
&= 122.565 \angle -110.985^\circ (B).
\end{aligned}$$

Діюче значення напруги вольтметра дорівнює:

$$\begin{aligned}
U_{PV} &= \varphi_e - \varphi_h = 122.565 \angle -110.985^\circ - 0 = 122.565 \angle -110.985^\circ (B); \quad (A.12) \\
U_{PV} &= 122.565 (B).
\end{aligned}$$

1.2 Баланс активних P та реактивних Q потужностей кола

У будь-якому колі синусоїдного струму сума комплексів вихідних потужностей джерел енергії дорівнює добутку комплексів вхідних потужностей усіх пасивних елементів цього кола. Визначимо потужність джерела ЕРС та її активну та реактивну складові:

$$\begin{aligned}\underline{S}_{\text{дж}} &= \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* = 230 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} \cdot (6.778 \angle -158.002^\circ) = P_{\text{дж}} + j \cdot Q_{\text{дж}} = \\ &= 1229 - j \cdot 959.88 (\text{ВА}).\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

де $\underline{I}_1^* = \text{Re}(\underline{I}_1) - j \text{Im}(\underline{I}_1)$ - комплексно-спряжена величина струму I_1 .

Розрахуємо активну потужність споживача:

$$\begin{aligned}P_{\text{сп}} &= I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 = \\ &= 6.778^2 \cdot 8 + 6.57^2 \cdot 10 + 3.826^2 \cdot 12 + 2.002^2 \cdot 14 + 3.513^2 \cdot 16 = \\ &= 1229 (\text{Вт}).\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Реактивна потужність споживача дорівнює

$$\begin{aligned}Q_{\text{сп}} &= I_1^2 \cdot (X_{L1} - X_{C1}) + I_2^2 \cdot (-X_{C2}) + I_3^2 \cdot X_{L2} + I_4^2 \cdot X_{L3} + I_5^2 \cdot (-X_{C3}) = \\ &= 6.778^2 \cdot (20 - 30) + 6.57^2 \cdot (-20) + 3.826^2 \cdot 25 + 2.002^2 \cdot 30 + \dots \\ &\dots + 3.513^2 \cdot (-10) = -959.88 (\text{Вар}).\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

Визначимо відносну похибку за активною та реактивною потужностями:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta P}{P_{\text{дж}}} &= \frac{P_{\text{дж}} - P_{\text{сп}}}{P_{\text{дж}}} \cdot 100\% = \frac{1229 - 1229}{1229} \cdot 100\% = 0; \\ \frac{\Delta Q}{Q_{\text{дж}}} &= \frac{Q_{\text{дж}} - Q_{\text{сп}}}{Q_{\text{дж}}} \cdot 100\% = \frac{959.88 - 959.88}{959.88} \cdot 100\% = 0.\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

Активні та реактивні потужності джерела електричної енергії та споживача однакові, тобто баланс збігається.

Висновок: аналіз електричного кола без впливу взаємної індукції між індуктивними котушками комплексним методом виконаний вірно.

1.3 Суміщена векторна діаграма струмів та топографічна діаграма напруг

Розглянемо електричну схему, яка представлена на рис. А.9. Поділимо електричне коло на ділянки між заданими точками. Прийемо за опорний вузол точку b , електричний потенціал якої дорівнює нулю ($\varphi_b = 0$).

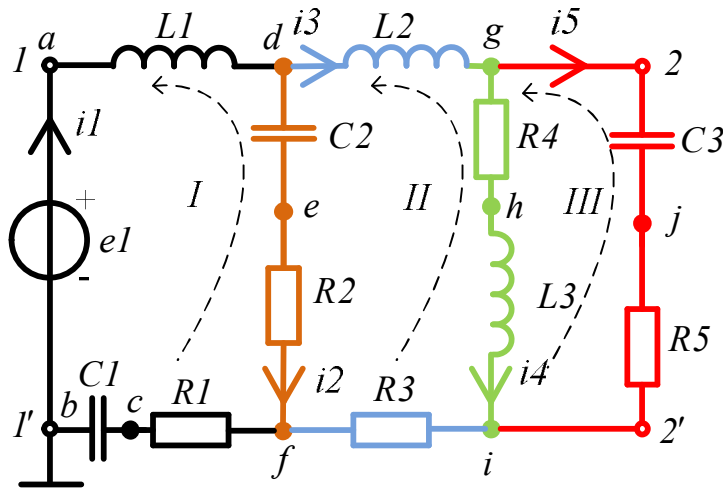


Рисунок А.9 – Електричне схема

Визначимо напругу на елементах електричного кола:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{cb} = \underline{U}_{C1} &= \underline{I}_1 \cdot (-j \cdot X_{C1}) = 6.778 \angle 158.002^\circ \cdot (-j \cdot 10) = \\ &= 76.171 + j \cdot 188.548 = 203.353 \angle 68.002^\circ (B); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{fc} = \underline{U}_{R1} &= \underline{I}_1 \cdot R_1 = 6.778 \angle 158.002^\circ \cdot 8 = \\ &= -50.279 + j \cdot 20.312 = 54.227 \angle 158.002^\circ (B); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ef} = \underline{U}_{R2} &= \underline{I}_2 \cdot R_2 = 6.57 \angle -168.73^\circ \cdot 10 = \\ &= -64.432 - j \cdot 12.84 = 65.699 \angle -168.73^\circ (B); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{de} &= \underline{U}_{C2} = \underline{I}_2 \cdot (-j \cdot X_{C2}) = 6.57 \angle -168.73^\circ \cdot (-j \cdot 20) = \\ &= -25.679 + j \cdot 128.864 = 131.397 \angle 101.27^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ad} &= \underline{U}_{L1} = \underline{I}_1 \cdot j \cdot X_{L1} = 6.778 \angle 158.002^\circ \cdot j \cdot 20 = \\ &= -50.781 - j \cdot 125.699 = 135.569 \angle -111.998^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{if} &= \underline{U}_{R3} = \underline{I}_3 \cdot R_3 = 3.826 \angle 87.63^\circ \cdot 12 = \\ &= 1.899 + j \cdot 45.876 = 45.915 \angle 87.63^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{hi} &= \underline{U}_{L3} = \underline{I}_4 \cdot j \cdot X_{L3} = 2.002 \angle 21.934^\circ \cdot j \cdot 30 = \\ &= -22.438 + j \cdot 55.721 = 60.069 \angle 111.934^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{gh} &= \underline{U}_{R4} = \underline{I}_4 \cdot R_4 = 2.002 \angle 21.934^\circ \cdot 14 = \\ &= 26.003 + j \cdot 10.471 = 28.032 \angle 21.934^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{dg} &= \underline{U}_{L2} = \underline{I}_3 \cdot j \cdot X_{L2} = 3.826 \angle 87.63^\circ \cdot j \cdot 25 = \\ &= -95.575 + j \cdot 3.956 = 95.657 \angle 177.63^\circ (B);\end{aligned}$$

(A.17)

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ji} &= \underline{U}_{R5} = \underline{I}_5 \cdot R_5 = 3.513 \angle 118.923^\circ \cdot 16 = \\ &= -27.186 + j \cdot 49.201 = 56.212 \angle 118.923^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{gj} &= \underline{U}_{C3} = \underline{I}_5 \cdot (-j \cdot X_{C3}) = 3.513 \angle 118.9232^\circ \cdot (-j \cdot 10) = \\ &= 30.751 + j \cdot 16.991 = 35.132 \angle 28.923^\circ (B).\end{aligned}$$

Визначимо комплексні потенціали усіх точок електричного кола. Починаючи від опорного вузла будемо обходити схему назустріч позитивному напрямку струму (чорні пунктирні лінії), як представлено на рис. А.9

$$\underline{\varphi}_b = 0;$$

$$\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_b + \underline{U}_{C1} = 0 + 203.353 \angle 68.002^\circ = 203.353 \angle 68.002^\circ (B);$$

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}_f &= \underline{\Phi}_c + \underline{U}_{R1} = \\ &= 203.353 \angle 68.002^\circ + 54.227 \angle 158.002^\circ = 210.459 \angle 82.933^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}_e &= \underline{\Phi}_f + \underline{U}_{R2} = \\ &= 210.459 \angle 82.933^\circ + 65.699 \angle -168.73^\circ = 199.774 \angle 101.123^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\Phi}_d} &= \underline{\Phi}_e + \underline{U}_{C2} = \\ &= 199.774 \angle 101.123^\circ + 131.397 \angle 101.27^\circ = \boxed{331.171 \angle 101.181^\circ} (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\Phi}_a} &= \underline{\Phi}_d + \underline{U}_{L1} = \\ &= 331.171 \angle 101.181^\circ + 135.569 \angle -111.998^\circ = \boxed{230 \angle 120^\circ} (B);\end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{\Phi}_a} = \underline{\Phi}_b + \underline{E}_1 = 0 + 230 \angle 120^\circ = \boxed{230 \angle 120^\circ} (B);$$

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}_i &= \underline{\Phi}_f + \underline{U}_{R3} = \\ &= 210.459 \angle 82.933^\circ + 45.915 \angle 87.63^\circ = 256.248 \angle 83.774^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}_h &= \underline{\Phi}_i + \underline{U}_{L3} = \\ &= 256.248 \angle 83.774^\circ + 60.069 \angle 111.934^\circ = 310.503 \angle 89.012^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\Phi}_g} &= \underline{\Phi}_h + \underline{U}_{R4} = \\ &= 310.503 \angle 89.012^\circ + 28.032 \angle 21.934^\circ = \boxed{322.456 \angle 84.42^\circ} (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\Phi}_d} &= \underline{\Phi}_g + \underline{U}_{L2} = \\ &= 322.456 \angle 84.42^\circ + 95.657 \angle 177.63^\circ = \boxed{331.171 \angle 101.181^\circ} (B); \tag{A.18}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}_j &= \underline{\Phi}_i + \underline{U}_{R5} = \\ &= 256.248 \angle 83.774^\circ + 56.212 \angle 118.923^\circ = 303.938 \angle 89.886^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\Phi}_g} &= \underline{\Phi}_j + \underline{U}_{C3} = \\ &= 303.938 \angle 89.886^\circ + 35.132 \angle 28.923^\circ = \boxed{322.456 \angle 84.42^\circ} (B).\end{aligned}$$

За результатами обрахунків будуюмо суміщену векторну діаграму струмів та топографічну векторну діаграму напруг, що зображена на рис. А.10. Де колір векторів струмів та напруг векторної діаграми відповідає кольору ділянки електричного кола представленого на рис. А.9.

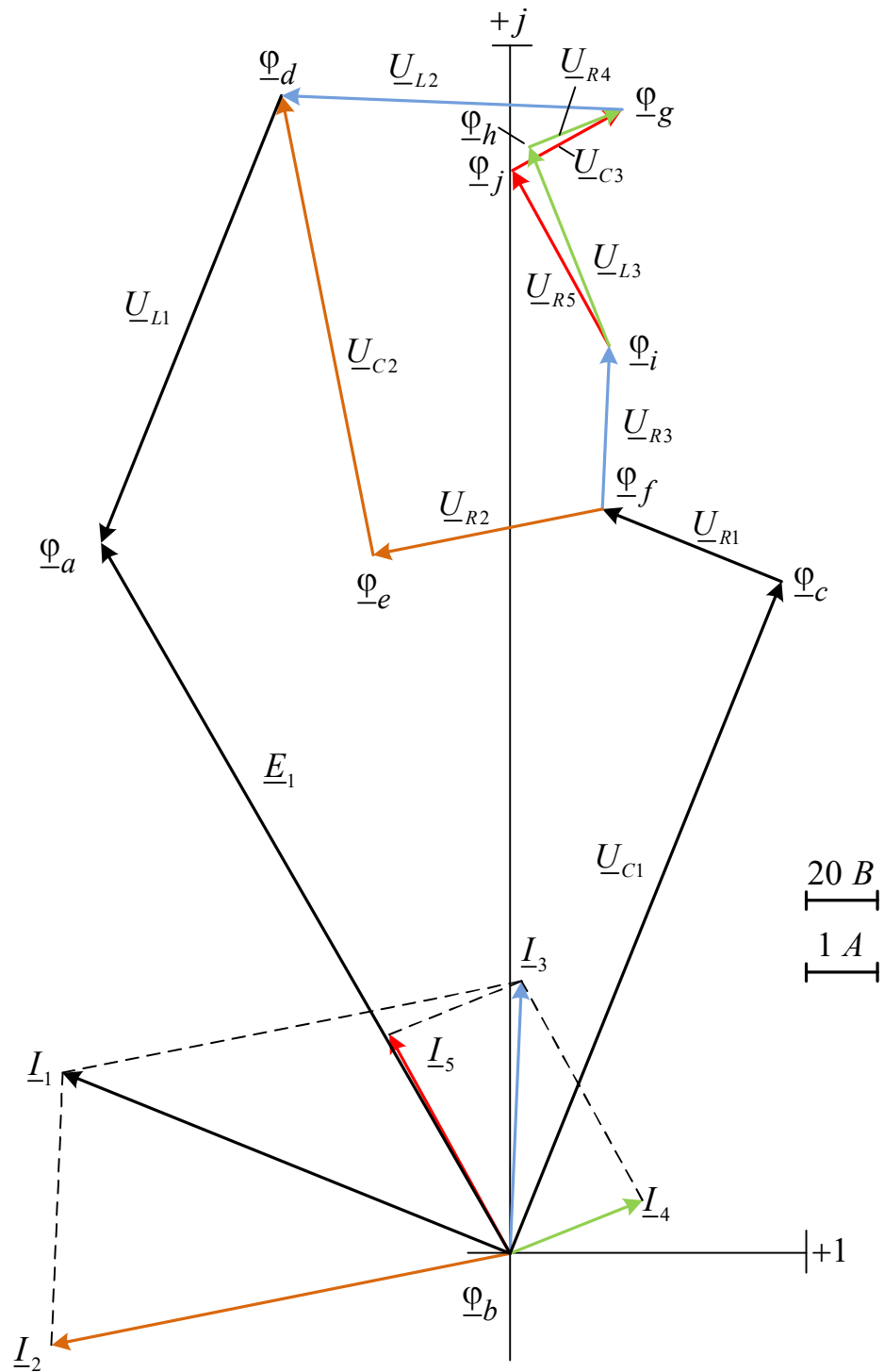


Рисунок А.10 – Суміщена векторна діаграма струмів та топографічна векторна діаграма напруг

1.4 Резонансний режим в електричному колі

Нехай активний опір $R_2 = 0$, а реактивний опір X_2 цієї вітки є невідомим. Визначимо значення та характер реактивного опору за умовою резонансу струмів, який спостерігається в електричному колі (рис. А.11).

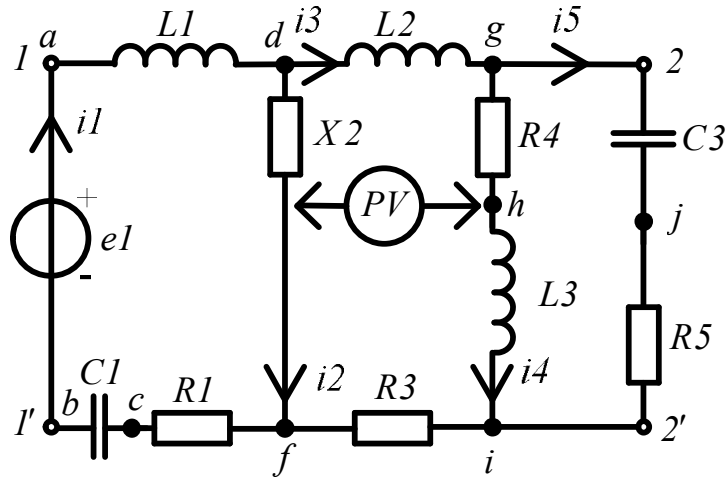


Рисунок А.11 – Електричне схема

Представимо електричну схему (рис. А.11) в комплексній формі (рис. А.12), з урахуванням еквівалентних перетворень у колі (рис. А.3).

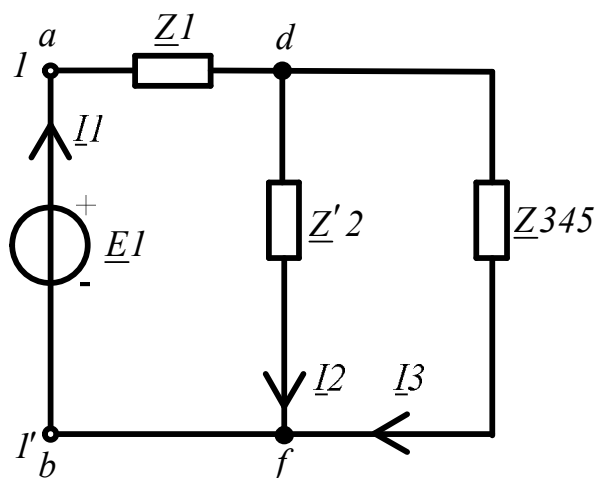


Рисунок А.12 – Еквівалентна схема

Комплекси опорів віток еквівалентної схеми (рис. А.12) розраховані в пункті 1 та дорівнюють:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j \cdot X_{L1} - j \cdot X_{C1} = 8 + j \cdot 20 - j \cdot 30 = 8 - j \cdot 10 = 12.806 \angle -51.34^\circ (Ом);$$

$$\underline{Z}_{345} = 29.323 + j \cdot 24.785 = 38.394 \angle 40.205^\circ (Ом).$$

Зазначимо, що реактивний опір еквівалентної вітки з опором \underline{Z}_{345} має індуктивний характер ($X_{345} = 24.785 > 0$). В електричному колі можливий резонанс струмів на ділянці df , коли реактивна провідність цієї ділянки дорівнює нулю $B_{df} = B_2 + B_{345} = 0$. Визначимо реактивну провідність вітки з опором \underline{Z}_{345} :

$$\underline{Y}_{345} = G_{345} + j \cdot B_{345} = \frac{1}{\underline{Z}_{345}} = \frac{1}{(R_{345} + j \cdot X_{345})} = \frac{(R_{345} - j \cdot X_{345})}{(R_{345} + j \cdot X_{345})(R_{345} - j \cdot X_{345})} =$$

$$= \frac{(R_{345} - j \cdot X_{345})}{(R_{345})^2 + (X_{345})^2} = \frac{R_{345}}{(R_{345})^2 + (X_{345})^2} - j \frac{X_{345}}{(R_{345})^2 + (X_{345})^2};$$

$$\boxed{B_L - B_C = 0} \text{ — умова резонансу струмів;} \quad (A.19)$$

$$B_L = B_{345};$$

$$B_2 + B_{345} = 0;$$

$$B_2 = -B_{345} = -\frac{X_{345}}{(R_{345})^2 + (X_{345})^2} = -\frac{24.785}{(29.323)^2 + (24.785)^2} = -0.017 (См).$$

Реактивний опір другої вітки дорівнює:

$$X_2 = \frac{1}{B_2} = \frac{1}{-0.017} = -59.477 (Ом). \quad (A.20)$$

Резонанс струмів в електричному колі (рис. А.11) можливий, якщо у другій вітці стоїть конденсатор з реактивним опором $|X_{C2}| = 59.477 (Ом)$.

1.4.1 Розрахунок струмів в електричному колі у резонансному режимі

Зобразимо електричне коло у комплексній формі для розрахунку усіх струмів, яке представлено на рис. А.13.

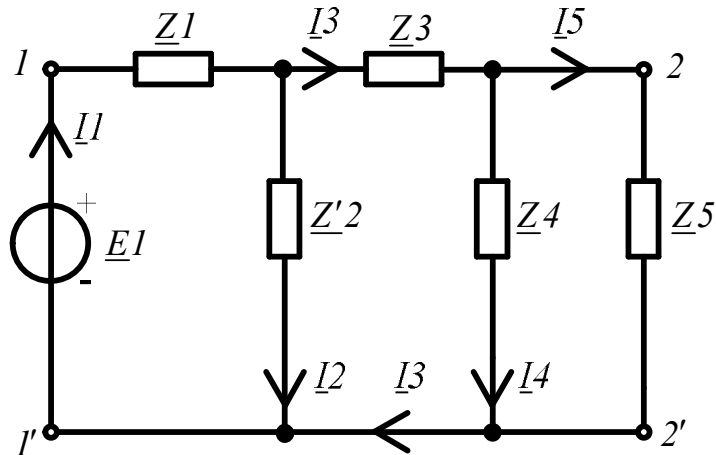


Рисунок А.13 – Комплексна еквівалентна схема електричного кола

Комплексний опір другої вітки еквівалентної схеми дорівнює:

$$\underline{Z}'_2 = -j \cdot X_{C2} = -j \cdot 59.477 = 59.477 \angle -90^\circ (\text{Ом}).$$

Опори \underline{Z}'_2 та \underline{Z}_{345} з'єднані паралельно, тому еквівалентний опір дорівнює:

$$\underline{Z}_{2345} = \frac{\underline{Z}'_2 \cdot \underline{Z}_{345}}{\underline{Z}'_2 + \underline{Z}_{345}} = \frac{59.477 e^{j-90^\circ} \cdot 38.394 e^{j(40.205^\circ)}}{59.477 e^{j-90^\circ} + 38.394 e^{j(40.205^\circ)}} = 50.272 (\text{Ом}). \quad (\text{A.21})$$

Опори \underline{Z}_1 та \underline{Z}_{2345} з'єднані послідовно, тому загальний еквівалентний опір усього кола визначається за формулою:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_e &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{2345} = (8 - j \cdot 10) + 50.272 = (58.272 - j \cdot 20.891) = \\ &= 59.123 \angle -9.738^\circ (\text{Ом}). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Розраховуємо струм \underline{I}_1 за законом Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_e} = \frac{230 \cdot e^{j \cdot 120^\circ}}{59.123 \cdot e^{j \cdot 9.738^\circ}} = -2.487 + j \cdot 2.991 = 3.89 \angle 129.738^\circ (A). \quad (A.23)$$

За правилом «чужого плеча» знаходимо значення струму \underline{I}_2 :

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_{345}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{345}} = 3.89 e^{j 129.738^\circ} \cdot \frac{38.394 e^{j(40.205^\circ)}}{59.477 e^{j \cdot 90^\circ} + 38.394 e^{j(40.205^\circ)}} = \\ &= -2.528 - j \cdot 2.102 = 3.288 \angle -140.262^\circ (A). \end{aligned} \quad (A.24)$$

За першим законом Кірхгофа у комплексній формі визначаємо струм \underline{I}_3 :

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 3.89 \angle 129.738^\circ - 3.288 \angle -140.262^\circ = \\ &= 0.042 + j \cdot 5.093 = 5.094 \angle 89.532^\circ (A). \end{aligned} \quad (A.25)$$

Проведемо аналогічні дії для знаходження струмів \underline{I}_4 та \underline{I}_5 . За правилом «чужого плеча» знаходимо значення струму \underline{I}_4 :

$$\begin{aligned} \underline{I}_4 &= \underline{I}_3 \cdot \frac{\underline{Z}_5}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = 5.094 e^{j 89.532^\circ} \cdot \frac{18.868 e^{j(-32.005^\circ)}}{33.106 e^{j 64.983^\circ} + 18.868 e^{j(-32.005^\circ)}} = \\ &= 2.438 + j \cdot 1.077 = 2.665 \angle 23.837^\circ (A). \end{aligned} \quad (A.26)$$

За першим законом Кірхгофа у комплексній формі визначаємо струм \underline{I}_5 :

$$\begin{aligned} \underline{I}_5 &= \underline{I}_3 - \underline{I}_4 = (0.042 + j \cdot 5.093) - (2.438 + j \cdot 1.077) = \\ &= -2.397 + j \cdot 4.016 = 4.677 \angle 120.825^\circ (A). \end{aligned} \quad (A.27)$$

1.4.2 Визначення показу вольтметра при резонансі струмів в електричному колі

Візьмемо за опорний вузол точку h , тобто електричний потенціал $\varphi_h = 0$. Розрахуємо електричний потенціал точки φ_f , який зображений на рис. А. 14, за двома шляхами. Перший шлях проходить через елементи електричного кола $R_4 \rightarrow L_2 \rightarrow C'_2$, тому φ_f визначається за виразом:

$$\begin{aligned}\varphi_f &= \varphi_h + I_4 \cdot R_4 + I_3 \cdot j \cdot X_{L2} - I_2 \cdot (-j \cdot X'_{C2}) = \\ &= 0 + 2.665 \angle 23.837^\circ \cdot 14 + 5.094 \angle 89.532^\circ \cdot j \cdot 25 + \dots \\ &\dots - 3.288 \angle -140.262^\circ \cdot (-j \cdot 59.477) = \\ &= 31.818 - j \cdot 134.265 = 137.983 \angle -76.668^\circ (B).\end{aligned}\tag{A.28}$$

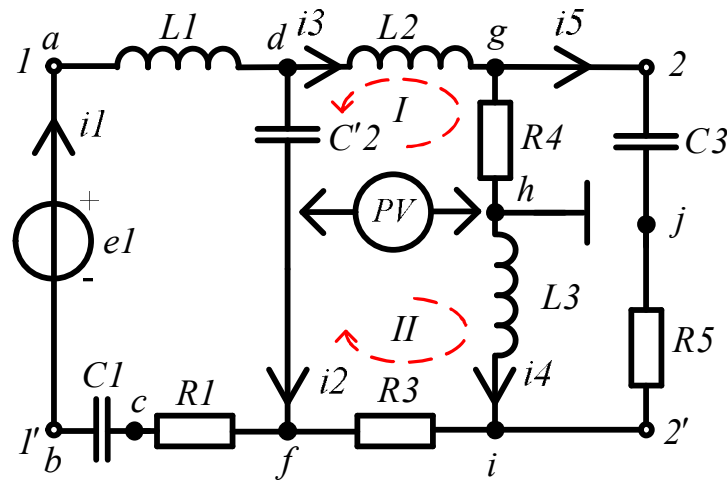


Рисунок А.14 – Електричне схема

Другий шлях проходить через елементи електричного кола $L_3 \rightarrow R_3$. Електричний потенціал φ_f розрахуємо за формулою:

$$\begin{aligned}\varphi_f &= \varphi_h - I_4 \cdot j \cdot X_{L3} - I_3 \cdot R_3 = \\ &= 0 - 2.665 \angle 23.837^\circ \cdot j \cdot 30 - 5.094 \angle 89.532^\circ \cdot 12 = \\ &= 31.818 - j \cdot 134.265 = 137.983 \angle -76.668^\circ (B).\end{aligned}\tag{A.29}$$

Діюче значення напруги вольтметра дорівнює:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{PV} &= \underline{\phi}_f - \underline{\phi}_h = 137.983 \angle -76.668^\circ - 0 = 137.983 \angle -76.668^\circ (B); \\ U_{PV} &= 137.983 (B).\end{aligned}\quad (A.30)$$

1.4.3 Баланс активних та реактивних потужностей при резонансі струмів в електричному колі

Визначимо потужність джерела ЕРС та її активну та реактивну складові:

$$\begin{aligned}\underline{S}_{дж} &= \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* = 230 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} \cdot (3.89 \angle -129.738^\circ) = P_{дж} + j \cdot Q_{дж} = \\ &= 881.846 - j \cdot 151.334 (BA).\end{aligned}\quad (A.31)$$

Розрахуємо активну потужність споживача:

$$\begin{aligned}P_{сп} &= I_1^2 \cdot R_1 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 = \\ &= 3.89^2 \cdot 8 + 5.094^2 \cdot 12 + 2.665^2 \cdot 14 + 4.677^2 \cdot 16 = \\ &= 881.846 (Bm).\end{aligned}\quad (A.32)$$

Реактивна потужність споживача дорівнює:

$$\begin{aligned}Q_{сп} &= I_1^2 \cdot (X_{L1} - X_{C1}) + I_2^2 \cdot (-X'_{C2}) + I_3^2 \cdot X_{L2} + I_4^2 \cdot X_{L3} + I_5^2 \cdot (-X_{C3}) = \\ &= 3.89^2 \cdot (20 - 30) + 3.288^2 \cdot (-59.477) + 5.094^2 \cdot 25 + 2.665^2 \cdot 30 + \dots \\ &\dots + 4.677^2 \cdot (-10) = -151.334 (Var).\end{aligned}\quad (A.33)$$

Визначимо відносну похибку за активною та реактивною потужностями:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta P}{P_{дж}} &= \frac{P_{дж} - P_{сп}}{P_{дж}} \cdot 100\% = \frac{881.846 - 881.846}{881.846} \cdot 100\% = 0; \\ \frac{\Delta Q}{Q_{дж}} &= \frac{Q_{дж} - Q_{сп}}{Q_{дж}} \cdot 100\% = \frac{151.334 - 151.334}{151.334} \cdot 100\% = 0.\end{aligned}\quad (A.34)$$

Активні та реактивні потужності джерела електричної енергії та споживача однакові при резонансі струмів у колі, тобто баланс збігається.

Висновок: аналіз електричного кола комплексним методом виконаний вірно.

1.4.4 Суміщена векторна діаграма струмів та топографічна діаграма напруг при резонансі струмів в електричному колі

Розглянемо електричну схему, яка представлена на рис. А.15. Поділимо електричне коло на ділянки між заданими точками. Прийнемо за опорний вузол точку b , електричний потенціал якої дорівнює нулю ($\varphi_b = 0$).

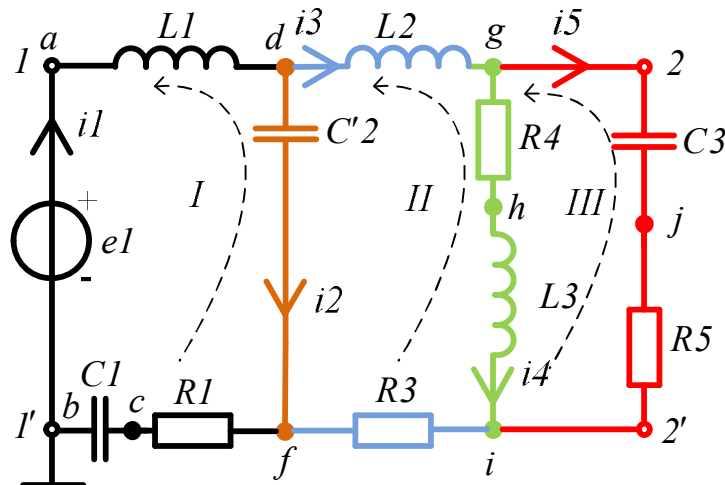


Рисунок А.15 – Електричне схема

Визначимо напругу на елементах електричного кола:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{cb} = \underline{U}_{C1} &= \underline{I}_1 \cdot (-j \cdot X_{C1}) = 3.89 \angle 129.738^\circ \cdot (-j \cdot 10) = \\ &= 89.744 + j \cdot 74.606 = 116.705 \angle 39.738^\circ (B); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{fc} = \underline{U}_{R1} &= \underline{I}_1 \cdot R_1 = 3.89 \angle 129.738^\circ \cdot 8 = \\ &= -19.895 + j \cdot 23.932 = 31.121 \angle 129.738^\circ (B); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{df} &= \underline{U}_{C'2} = \underline{I}_2 \cdot (-j \cdot X_{C'2}) = 3.288 \angle -140.262^\circ \cdot (-j \cdot 59.477) = \\ &= -125.02 + j \cdot 150.385 = 195.565 \angle 129.738^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ad} &= \underline{U}_{L1} = \underline{I}_1 \cdot j \cdot X_{L1} = 3.89 \angle 129.738^\circ \cdot j \cdot 20 = \\ &= -59.829 - j \cdot 49.738 = 77.803 \angle -140.262^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{if} &= \underline{U}_{R3} = \underline{I}_3 \cdot R_3 = 5.094 \angle 89.532^\circ \cdot 12 = \\ &= 0.499 + j \cdot 61.121 = 61.123 \angle 89.532^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{hi} &= \underline{U}_{L3} = \underline{I}_4 \cdot j \cdot X_{L3} = 2.665 \angle 23.837^\circ \cdot j \cdot 30 = \\ &= -32.317 + j \cdot 73.144 = 79.965 \angle 113.837^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{gh} &= \underline{U}_{R4} = \underline{I}_4 \cdot R_4 = 2.665 \angle 23.837^\circ \cdot 14 = \\ &= 34.134 + j \cdot 15.081 = 37.317 \angle 23.837^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{dg} &= \underline{U}_{L2} = \underline{I}_3 \cdot j \cdot X_{L2} = 5.094 \angle 89.532^\circ \cdot j \cdot 25 = \\ &= -127.336 + j \cdot 1.039 = 127.34 \angle 179.532^\circ (B);\end{aligned}$$

(A.35)

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ji} &= \underline{U}_{R5} = \underline{I}_5 \cdot R_5 = 4.677 \angle 120.825^\circ \cdot 16 = \\ &= -38.345 + j \cdot 64.259 = 74.83 \angle 120.825^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{gj} &= \underline{U}_{C3} = \underline{I}_5 \cdot (-j \cdot X_{C3}) = 4.677 \angle 120.825^\circ \cdot (-j \cdot 10) = \\ &= 40.162 + j \cdot 23.966 = 46.769 \angle 30.825^\circ (B).\end{aligned}$$

Визначимо комплексні потенціали усіх точок електричного кола. Починаючи від опорного вузла будемо обходити схему назустріч позитивному напрямку струму (чорні пунктирні лінії), як представлено на рис. А.15

$$\underline{\varphi}_b = 0;$$

$$\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_b + \underline{U}_{C1} = 0 + 116.705 \angle 39.738^\circ = 116.705 \angle 39.738^\circ (B);$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_f &= \underline{\varphi}_c + \underline{U}_{R1} = \\ &= 116.705 \angle 39.738^\circ + 31.121 \angle 129.738^\circ = 120.783 \angle 54.669^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\varphi}_d} &= \underline{\varphi}_f + \underline{U}_{C'2} = \\ &= 120.783 \angle 54.669^\circ + 195.565 \angle 129.738^\circ = \boxed{254.964 \angle 102.497^\circ} (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\varphi}_a} &= \underline{\varphi}_d + \underline{U}_{L1} = \\ &= 254.964 \angle 102.497^\circ + 77.803 \angle -140.262^\circ = \boxed{230 \angle 120^\circ} (B);\end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{\varphi}_a} = \underline{\varphi}_b + \underline{E}_1 = 0 + 230 \angle 120^\circ = \boxed{230 \angle 120^\circ} (B);$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_i &= \underline{\varphi}_f + \underline{U}_{R3} = \\ &= 120.783 \angle 54.669^\circ + 61.123 \angle 89.532^\circ = 174.47 \angle 66.221^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_h &= \underline{\varphi}_i + \underline{U}_{L3} = \\ &= 174.47 \angle 66.221^\circ + 79.965 \angle 113.837^\circ = 235.889 \angle 80.722^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\varphi}_g} &= \underline{\varphi}_h + \underline{U}_{R4} = \\ &= 235.889 \angle 80.722^\circ + 37.317 \angle 23.837^\circ = \boxed{258.175 \angle 73.768^\circ} (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\varphi}_d} &= \underline{\varphi}_g + \underline{U}_{L2} = \\ &= 258.175 \angle 73.768^\circ + 127.34 \angle 179.532^\circ = \boxed{254.964 \angle 102.497^\circ} (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_j &= \underline{\varphi}_i + \underline{U}_{R5} = \\ &= 174.47 \angle 66.221^\circ + 74.83 \angle 120.825^\circ = 226.194 \angle 81.866^\circ (B); \quad (A.36)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\varphi}_g} &= \underline{\varphi}_j + \underline{U}_{C3} = \\ &= 226.194 \angle 81.866^\circ + 46.769 \angle 30.825^\circ = \boxed{258.175 \angle 73.768^\circ} (B).\end{aligned}$$

За результатами обрахунків будуюмо суміщену векторну діаграму

струмів та топографічну векторну діаграму напруг, що зображена на рис. А.16. Де колір векторів струмів та напруг векторної діаграми відповідає кольору ділянки електричного кола представленого на рис. А.15.

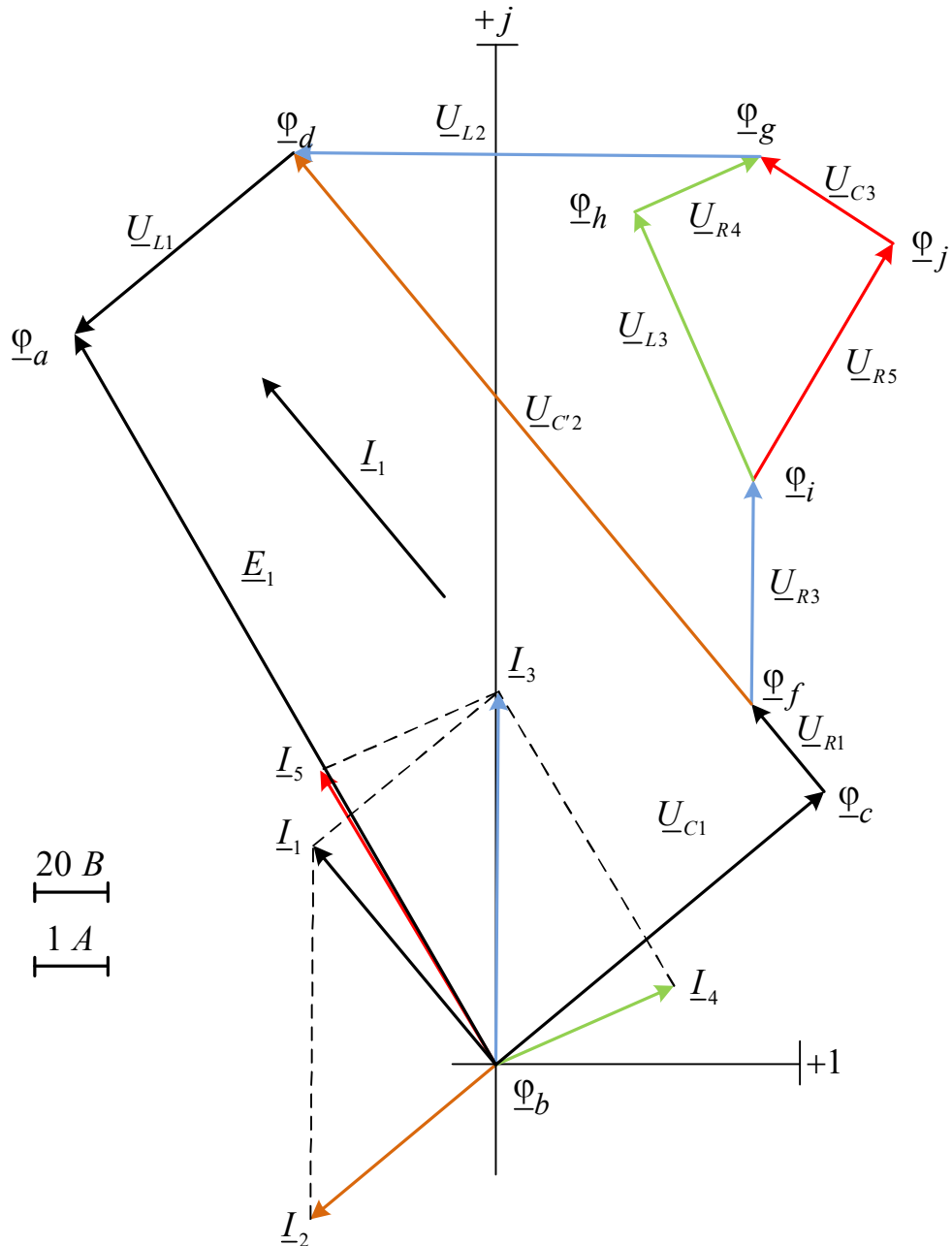


Рисунок А.16 – Суміщена векторна діаграма струмів та топографічна векторна діаграма напруг

З суміщеної векторної діаграми струмів та топографічної векторної діаграми напруг видно, що на резонансній ділянці напруга \underline{U}_{df} та струм \underline{I}_1 співпадають за фазою (вектори напруги \underline{U}_{df} та струму \underline{I}_1 паралельні).

1.5 Частотна характеристика вхідного опору електричного кола

Проаналізуємо частотну характеристику вхідного опору електричного кола (рис. А.2), видаливши із цього кола активні опори. Активні опори віток, з'єднані паралельно з ємністю чи індуктивністю розірвати ($R = \infty$), всі інші замінити перемичкою ($R = 0$). Електрична схема після внесених змін отримає наступний вигляд (А.17).

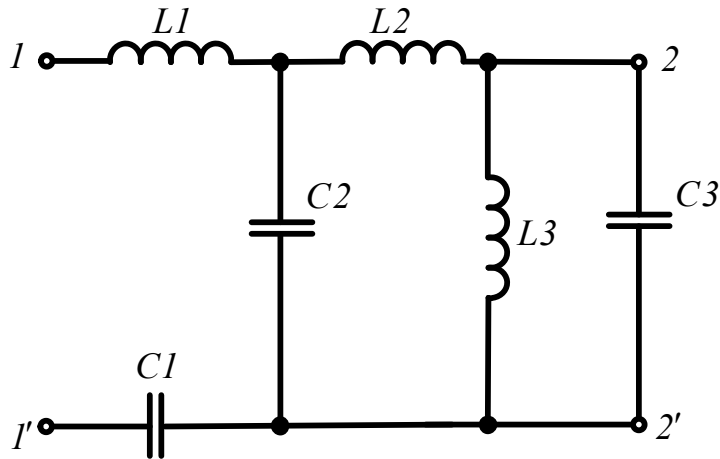


Рисунок А.17 – Електричне схема

Загальний вхідний опір $Z(p) = Z(j\omega)$ в операторній формі відносно затискачів 1 – 1' :

$$Z(p) = pL_1 + \frac{1}{pC_1} + \frac{\frac{1}{pC_2} \cdot \left[\frac{pL_3 \cdot \frac{1}{pC_3}}{pL_3 + \frac{1}{pC_3}} + pL_2 \right]}{\frac{1}{pC_2} + \left[\frac{pL_3 \cdot \frac{1}{pC_3}}{pL_3 + \frac{1}{pC_3}} + pL_2 \right]} = \frac{N(p)}{M(p)}. \quad (\text{A.37})$$

Для спрощення визначення вхідного опору $Z(j\omega)$, розглянемо окремо паралельні та послідовні з'єднання елементів кола

$$Z_1(p) = \frac{pL_3 \cdot \frac{1}{pC_3}}{pL_3 + \frac{1}{pC_3}} = \frac{pL_3 \cdot \frac{1}{\cancel{pC_3}}}{\frac{pC_3 \cdot pL_3 + 1}{\cancel{pC_3}}} = \frac{pL_3}{p^2C_3L_3 + 1};$$

$$Z_1(j\omega) = \frac{j\omega \cdot L_3}{(j\omega)^2 C_3 L_3 + 1} = j \left(\frac{\omega \cdot L_3}{-\omega^2 C_3 L_3 + 1} \right);$$

$$Z_2(j\omega) = j \left(\frac{\omega \cdot L_3}{-\omega^2 C_3 L_3 + 1} + \omega \cdot L_2 \right);$$

$$Z_3(j\omega) = \frac{\cancel{j} \left(\frac{\omega \cdot L_3}{-\omega^2 C_3 L_3 + 1} + \omega \cdot L_2 \right) \cdot \frac{1}{\cancel{j}\omega \cdot C_2}}{j \left(\frac{\omega \cdot L_3}{-\omega^2 C_3 L_3 + 1} + \omega \cdot L_2 \right) + \frac{1}{j\omega \cdot C_2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\omega \cdot L_3}{-\omega^2 C_3 L_3 + 1} + \omega \cdot L_2 \right) \cdot \left(\frac{1}{\omega \cdot C_2} \right)}{j \left(\frac{\omega \cdot L_3}{-\omega^2 C_3 L_3 + 1} + \omega \cdot L_2 \right) + \left(\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2} \right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\omega \cdot L_3 + \omega \cdot L_2 (-\omega^2 C_3 L_3 + 1)}{-\omega^2 C_3 L_3 + 1} \right) \cdot \left(\frac{1}{\omega \cdot C_2} \right)}{\left[j \left(\frac{\omega \cdot L_3 + \omega \cdot L_2 (-\omega^2 C_3 L_3 + 1)}{-\omega^2 C_3 L_3 + 1} \right) + \left(\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2} \right) \right]} =$$

$$Z_3(j\omega) = \frac{\left(\frac{\omega \cdot L_3 + \omega \cdot L_2(-\omega^2 C_3 L_3 + 1)}{-\omega^2 C_3 L_3 + 1} \right) \cdot \left(\frac{1}{\omega \cdot C_2} \right)}{\left[\frac{j \left[\omega \cdot L_3 + \omega \cdot L_2(-\omega^2 C_3 L_3 + 1) \right] \cdot j \cdot \omega \cdot C_2 + (-\omega^2 C_3 L_3 + 1)}{j \cdot (-\omega^2 C_3 L_3 + 1) \cdot \omega \cdot C_2} \right]} =$$

$$= j \frac{\omega \cdot L_3 + \omega \cdot L_2(-\omega^2 C_3 L_3 + 1)}{-\left[\omega \cdot L_3 + \omega \cdot L_2(-\omega^2 C_3 L_3 + 1) \right] \cdot \omega \cdot C_2 - \omega^2 C_3 L_3 + 1} =$$

$$= j \frac{\omega \cdot L_3 - \omega^3 C_3 L_2 L_3 + \omega \cdot L_2}{-\left[\omega^2 C_2 L_3 - \omega^4 C_2 C_3 L_2 L_3 + \omega^2 C_2 L_2 \right] - \omega^2 C_3 L_3 + 1} =$$

$$= j \frac{-\omega^3 C_3 L_2 L_3 + \omega(L_2 + L_3)}{\omega^4 C_2 C_3 L_2 L_3 - \omega^2(C_2 L_3 + C_2 L_2 + C_3 L_3) + 1} =$$

$$= j \frac{-\omega^3 C_3 L_2 L_3 + \omega(L_2 + L_3)}{\omega^4 C_2 C_3 L_2 L_3 - \omega^2(C_2 L_3 + C_2 L_2 + C_3 L_3) + 1};$$

$$Z(j\omega) = j \left[\frac{-\omega^3 C_3 L_2 L_3 + \omega(L_2 + L_3)}{\omega^4 C_2 C_3 L_2 L_3 - \omega^2(C_2 L_3 + C_2 L_2 + C_3 L_3) + 1} + \omega L_1 - \frac{1}{\omega \cdot C_1} \right];$$

$$Z(j\omega) = \frac{F(\omega)}{H(\omega)} = j \cdot X(\omega);$$

$$\boxed{X(\omega) = \frac{-\omega^3 C_3 L_2 L_3 + \omega(L_2 + L_3)}{\omega^4 C_2 C_3 L_2 L_3 - \omega^2(C_2 L_3 + C_2 L_2 + C_3 L_3) + 1} + \omega L_1 - \frac{1}{\omega \cdot C_1}}. \quad (\text{A.38})$$

Розраховуємо параметри реактивних елементів при заданій лінійній частоті $f = 50(\text{Гц})$:

$$\begin{aligned}
\omega &= 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 50 = 314.159 \text{ (rad/c)}; \\
L_1 &= \frac{X_{L1}}{\omega} = \frac{20}{314.159} = 0.064 \text{ (Гн)}; \\
L_2 &= \frac{X_{L2}}{\omega} = \frac{25}{314.159} = 0.08 \text{ (Гн)}; \\
L_3 &= \frac{X_{L3}}{\omega} = \frac{30}{314.159} = 0.095 \text{ (Гн)}; \\
C_1 &= \frac{1}{\omega \cdot X_{C1}} = \frac{1}{314.159 \cdot 30} = 1.061 \cdot 10^{-4} \text{ (Ф)}; \\
C_2 &= \frac{1}{\omega \cdot X_{C2}} = \frac{1}{314.159 \cdot 20} = 1.592 \cdot 10^{-4} \text{ (Ф)}; \\
C_3 &= \frac{1}{\omega \cdot X_{C3}} = \frac{1}{314.159 \cdot 10} = 3.183 \cdot 10^{-4} \text{ (Ф)}.
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Таким, чином вхідний опір $X(\omega)$ дорівнює:

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \frac{-\omega^3 C_3 L_2 L_3 + \omega(L_2 + L_3)}{\omega^4 C_2 C_3 L_2 L_3 - \omega^2 (C_2 L_3 + C_2 L_2 + C_3 L_3) + 1} + \omega L_1 - \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{F(\omega)}{H(\omega)}; \\
F(\omega) &= (-\omega^3 C_3 L_2 L_3 + \omega(L_2 + L_3))\omega \cdot C_1 + \dots \\
\dots &+ (\omega^2 C_1 L_1 - 1)(\omega^4 C_2 C_3 L_2 L_3 - \omega^2 (C_2 L_3 + C_2 L_2 + C_3 L_3) + 1); \\
H(\omega) &= \left(\omega^4 C_2 C_3 L_2 L_3 - \omega^2 (C_2 L_3 + C_2 L_2 + C_3 L_3) + 1 \right) \cdot \omega \cdot C_1.
\end{aligned} \tag{A.40}$$

У рівняння $F(\omega)$ підставимо величини реактивних параметрів електричного кола:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= (-\omega^3 C_3 L_2 L_3 + \omega(L_2 + L_3))\omega \cdot C_1 + \dots \\
\dots &+ (\omega^2 C_1 L_1 - 1)(\omega^4 C_2 C_3 L_2 L_3 - \omega^2 (C_2 L_3 + C_2 L_2 + C_3 L_3) + 1) = \\
&= (-\omega^3 \cdot 3.183 \cdot 10^{-4} \cdot 0.08 \cdot 0.095 + \omega(0.08 + 0.095))\omega \cdot 1.061 \cdot 10^{-4} + \dots \\
\dots &+ (\omega^2 \cdot 1.061 \cdot 10^{-4} \cdot 0.064 - 1)(\omega^4 \cdot 1.592 \cdot 10^{-4} \cdot 3.183 \cdot 10^{-4} \cdot 0.08 \cdot 0.095 - \dots \\
\dots &- \omega^2 (1.592 \cdot 10^{-4} \cdot 0.095 + 1.592 \cdot 10^{-4} \cdot 0.08 + 3.183 \cdot 10^{-4} \cdot 0.095) + 1) = \\
&= 2.6 \cdot 10^{-15} \cdot \omega^6 - 1.035 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^4 + 0.000084 \cdot \omega^2 - 1.
\end{aligned} \tag{A.41}$$

У рівняння $H(\omega)$ підставимо величини реактивних параметрів електричного кола:

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \left(\omega^4 C_2 C_3 L_2 L_3 - \omega^2 (C_2 L_3 + C_2 L_2 + C_3 L_3) + 1 \right) \cdot \omega \cdot C_1 = \\
 &= (\omega^4 \cdot 1.592 \cdot 10^{-4} \cdot 3.183 \cdot 10^{-4} \cdot 0.08 \cdot 0.095 - \omega^2 (1.592 \cdot 10^{-4} \cdot 0.095 + \dots \\
 &\dots + 1.592 \cdot 10^{-4} \cdot 0.08 + 3.183 \cdot 10^{-4} \cdot 0.095) + 1) \cdot \omega \cdot 1.061 \cdot 10^{-4} = \quad (A.42) \\
 &= 4.085 \cdot 10^{-14} \cdot \omega^5 - 6.182 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^3 + 0.00011 \cdot \omega.
 \end{aligned}$$

Далі з рівняння $F(\omega) = 0$ визначаємо нульові значення функції $X(\omega)$ за допомогою прикладних математичних програм:

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= 2.6 \cdot 10^{-15} \cdot \omega^6 - 1.035 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^4 + 0.000084 \cdot \omega^2 - 1 = 0, \\
 \omega_1 &= 541.074 (rad/c); \omega_2 = -541.074 (rad/c); \quad (A.43) \\
 \omega_3 &= 301.421 (rad/c); \omega_4 = -301.421 (rad/c); \\
 \omega_5 &= 120.24 (rad/c); \omega_6 = -120.24 (rad/c).
 \end{aligned}$$

Оскільки від'ємні частоти фізично не реалізуються, то нулями функції $X(\omega)$ є частоти:

$$\underline{\omega_1 = 541.074 (rad/c); \omega_3 = 301.421 (rad/c); \omega_5 = 120.24 (rad/c).}$$

Визначаємо полюси функції $X(\omega)$, прирівнюючи $H(\omega) = 0$:

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= 4.085 \cdot 10^{-14} \cdot \omega^5 - 6.182 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^3 + 0.00011 \cdot \omega = 0, \\
 \omega_7 &= 0; \quad (A.44) \\
 \omega_8 &= 140.496 (rad/c); \omega_9 = -140.496 (rad/c); \\
 \omega_{10} &= 362.76 (rad/c); \omega_{11} = -362.76 (rad/c).
 \end{aligned}$$

Таким чином, маємо полюси при частотах

$$\underline{\omega_7 = 0; \omega_8 = 140.496 (rad/c); \omega_{10} = 362.76 (rad/c).}$$

Побудуємо частотну характеристику електричного кола, функції $X(\omega)$, яка зображена на рис. А.18. Кутова частота ω змінюється у діапазоні від 0 до 800 рад/с.

$$X(\omega) = \frac{2.6 \cdot 10^{-15} \cdot \omega^6 - 1.035 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^4 + 0.000084 \cdot \omega^2 - 1}{4.085 \cdot 10^{-14} \cdot \omega^5 - 6.182 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^3 + 0.00011 \cdot \omega}$$

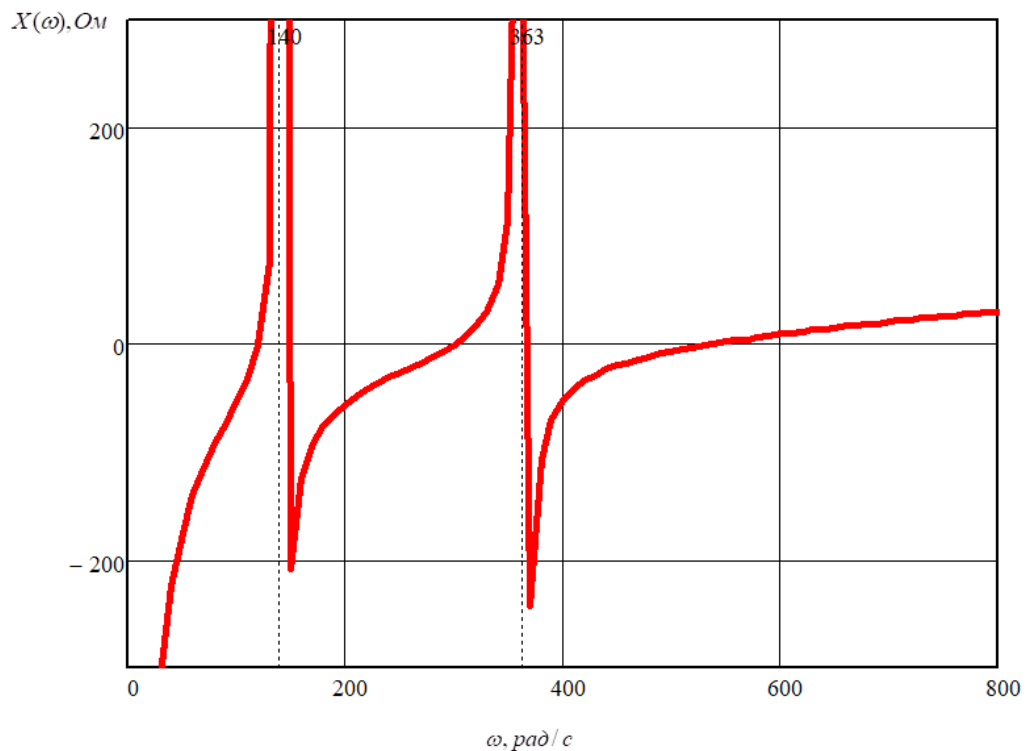


Рисунок А.18 – Частотна характеристика електричного кола

2. Розрахунок струмів комплексним методом електричного кола при наявності магнітного зв'язку між індуктивними елементами

Розглянемо задану схему, яка представлена на рис. А.19. Де «•» позначено однойменні кінці елементів. Перетворимо електричну схему до двох незалежних контурів (рис. А. 20). Аналіз електричного кола проведемо за допомогою методу контурних струмів.

З першого розділу розрахункової роботи перепишемо визначений еквівалентний опір \underline{Z}_{45} :

$$\underline{Z}_{45} = R_{45} - j \cdot X_{C45} = 17.323 - j \cdot 0.215 = 17.324 \angle -0.712^\circ (\text{Ом}).$$

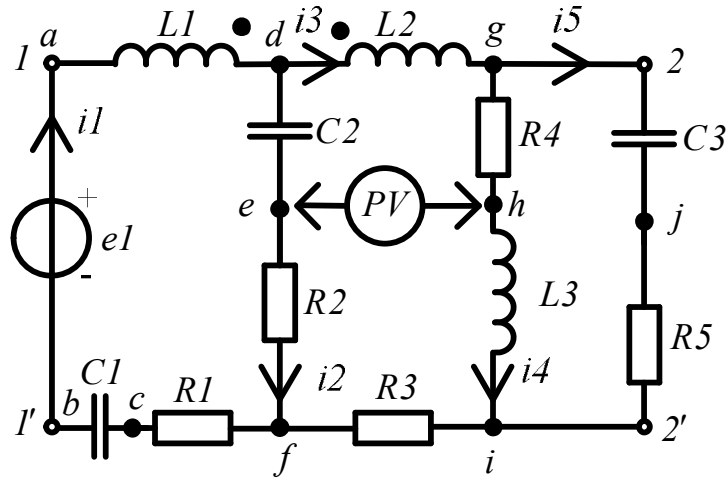


Рисунок А.19 – Електричне коло

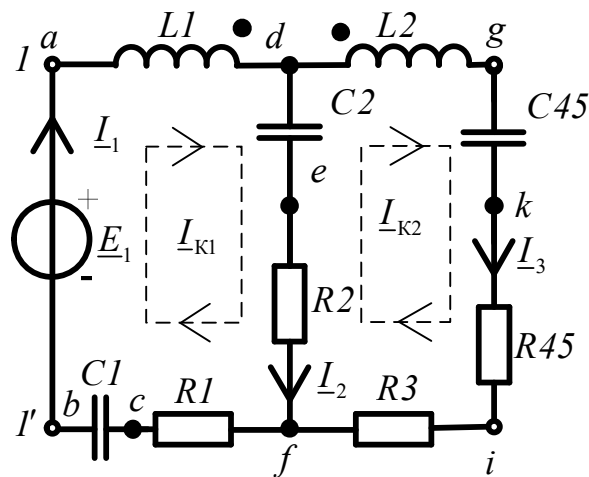


Рисунок А.20 – Розгалужене електричне коло з взаємною індукцією

Напрямки обходу контурів I та II й позитивні напрямки струмів вибираємо, відповідно до рис. А.20. Запишемо систему рівнянь через контурні струми:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11} \underline{I}_{K1} + \underline{Z}_{12} \underline{I}_{K2} = \underline{E}_{K1}; \\ \underline{Z}_{21} \underline{I}_{K1} + \underline{Z}_{22} \underline{I}_{K2} = \underline{E}_{K2}, \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

де $\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{22}$ - власні комплексні опори I та II контурів;

$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ - суміжні комплексні опори;

\underline{E}_{K1} - комплексна ЕРС першого контуру;

\underline{E}_{K2} - комплексна ЕРС другого контуру,

Розрахуємо комплексні опори та контурні ЕРС для даною системи з урахуванням магнітного зв'язку між індуктивними елементами:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{11} &= R_1 + R_2 + j \cdot X_{L1} - j \cdot X_{C1} = 8 + 10 + j \cdot 20 - j \cdot 30 = 18 - j \cdot 10 = \\ &= 20.591 \angle -29.005^\circ (Om); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{22} &= R_2 + R_3 + R_{45} + j \cdot X_{L2} - j \cdot X_{C2} - j \cdot X_{C45} = \\ &= 10 + 12 + 17.323 + j \cdot 25 - j \cdot 20 - j \cdot 0.215 = 39.323 + j \cdot 4.785 = \\ &= 39.613 \angle 6.937^\circ (Om); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} &= -(R_2 - j \cdot X_{C2}) - j \cdot X_M = -(10 - j \cdot 20) - j \cdot 25 = \\ &= 11.18 \angle -153.435^\circ (Om); \end{aligned}$$

$$\underline{E}_{K1} = \underline{E}_1 = 230 \angle 120^\circ (B);$$

$$\underline{E}_{K2} = 0. \tag{A.46}$$

Запишемо знайдені величини (A.46) у систему (A.45) та визначимо контурні струму за методом Крамера:

$$\begin{cases} 20.591 \angle -29.005^\circ \cdot \underline{I}_{K1} + 11.18 \angle -153.435^\circ \cdot \underline{I}_{K2} = \underline{E}_{K1}; \\ 11.18 \angle -153.435^\circ \cdot \underline{I}_{K1} + 39.613 \angle 6.937^\circ \cdot \underline{I}_{K2} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\underline{\Delta} &= \begin{vmatrix} 20.591 \angle -29.005^\circ & 11.18 \angle -153.435^\circ \\ 11.18 \angle -153.435^\circ & 39.613 \angle 6.937^\circ \end{vmatrix} = \\ &= 20.591 \angle -29.005^\circ \cdot 39.613 \angle 6.937^\circ - \dots \\ &\dots - 11.18 \angle -153.435^\circ \cdot 11.18 \angle -153.435^\circ = \\ &= 776.354 - j \cdot 1194 = 1424 \angle -56.958^\circ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\Delta}_1 &= \begin{vmatrix} 230\angle 120^\circ & 11.18\angle -153.435^\circ \\ 0 & 39.613\angle 6.937^\circ \end{vmatrix} = \\ &= 230\angle 120^\circ \cdot 39.613\angle 6.937^\circ - 0 \cdot 11.18\angle -153.435^\circ = \\ &= -5475 + j \cdot 7282 = 9111\angle 126.937^\circ; \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned}\underline{\Delta}_2 &= \begin{vmatrix} 20.591\angle -29.005^\circ & 230\angle 120^\circ \\ 11.18\angle -153.435^\circ & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 20.591\angle -29.005^\circ \cdot 0 - 11.18\angle -153.435^\circ \cdot 230\angle 120^\circ = \\ &= -2146 + j \cdot 1417 = 2571\angle 146.565^\circ. \end{aligned}$$

Оскільки визначник $\Delta \neq 0$, то система (A.45) має єдине рішення. За формулами Крамера розрахуємо контурні струми:

$$\begin{aligned}\underline{I}_{K1} &= \frac{\underline{\Delta}_1}{\underline{\Delta}} = \frac{9111\angle 126.937^\circ}{1424\angle -56.958^\circ} = -6.384 - j \cdot 0.435 = \\ &= 6.399\angle -176.1105^\circ (\text{A}); \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_{K2} &= \frac{\underline{\Delta}_2}{\underline{\Delta}} = \frac{2571\angle 146.565^\circ}{1424\angle -56.958^\circ} = -1.656 - j \cdot 0.721 = \\ &= 1.806\angle -156.477^\circ (\text{A}). \end{aligned}$$

Визначимо силу струмів віток, як алгебраїчну суму контурних струмів:

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{I}_{K1} = -6.384 - j \cdot 0.435 = 6.399\angle -176.1105^\circ (\text{A}); \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_{K1} - \underline{I}_{K2} = (-6.384 - j \cdot 0.435) - (-1.656 - j \cdot 0.721) = \\ &= -4.728 + j \cdot 0.286 = 4.737\angle 176.537^\circ (\text{A}); \\ \underline{I}_3 &= -1.656 - j \cdot 0.721 = 1.806\angle -156.477^\circ (\text{A}). \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Обрахуємо струми у 4 та 5 вітках за правилом «чужого плеча» та першим законом Кірхгофа у комплексній формі:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_4 &= \underline{I}_3 \cdot \frac{\underline{Z}_5}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = 1.806 e^{-j156.477^\circ} \cdot \frac{18.868 e^{j(-32.005^\circ)}}{33.106 e^{j64.983^\circ} + 18.868 e^{j(-32.005^\circ)}} = \\
&= -0.7 + j \cdot 0.634 = 0.945 \angle 137.828^\circ (A); \\
\underline{I}_5 &= \underline{I}_3 - \underline{I}_4 = 1.806 \angle -156.477^\circ - 0.945 \angle 137.828^\circ = \\
&= -0.955 - j \cdot 1.355 = 1.658 \angle -125.184^\circ (A).
\end{aligned} \tag{A.50}$$

2.1 Визначення показу вольтметра в електричному колі з взаємною індукцією

Візьмемо за опорний вузол точку h , тобто електричний потенціал $\varphi_h = 0$. Розрахуємо електричний потенціал точки φ_e , який зображений на рис. А. 21, за двома шляхами.

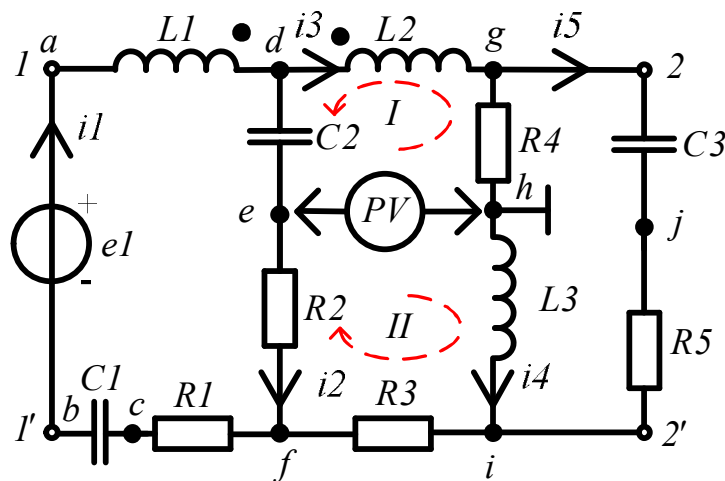


Рисунок А.21 – Електричне коло

Перший шлях проходить через елементи електричного кола $R_4 \rightarrow L_2 \rightarrow C_2$ (враховуємо магнітний зв'язок між котушками), тому φ_e дорівнює:

$$\begin{aligned}
\underline{\varphi}_f &= \underline{\varphi}_h + \underline{I}_4 \cdot R_4 + \underline{I}_3 \cdot j \cdot X_{L2} - \underline{I}_2 \cdot (-j \cdot X_{C2}) - \underline{I}_1 \cdot j \cdot X_M = \\
&= 0 + 0.945 \angle 137.828^\circ \cdot 14 + 1.806 \angle -156.477^\circ \cdot j \cdot 25 + \dots \\
&\dots - 4.737 \angle 176.537^\circ \cdot (-j \cdot 20) - 6.399 \angle -176.1105^\circ \cdot j \cdot 25 = \\
&= -8.376 + j \cdot 32.524 = 33.585 \angle 104.441^\circ (B).
\end{aligned} \tag{A.51}$$

Другий шлях проходить через елементи електричного кола $L_3 \rightarrow R_3 \rightarrow R_2$. Електричний потенціал $\underline{\varphi}_e$ розрахуємо за формулою:

$$\begin{aligned}
\underline{\varphi}_f &= \underline{\varphi}_h - \underline{I}_4 \cdot j \cdot X_{L3} - \underline{I}_3 \cdot R_3 + \underline{I}_2 \cdot R_2 = \\
&= 0 - 0.945 \angle 137.828^\circ \cdot j \cdot 30 - 1.806 \angle -156.477^\circ \cdot 12 + \dots \\
&\dots + 4.737 \angle 176.537^\circ \cdot 10 = \\
&= -8.376 + j \cdot 32.524 = 33.585 \angle 104.441^\circ (B).
\end{aligned} \tag{A.52}$$

Діюче значення напруги вольтметра дорівнює:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{PV} &= \underline{\varphi}_e - \underline{\varphi}_h = 33.585 \angle 104.441^\circ - 0 = 33.585 \angle 104.441^\circ (B); \\
U_{PV} &= 33.585 (B).
\end{aligned} \tag{A.53}$$

2.2 Баланс активних та реактивних потужностей в електричному колі з взаємною індукцією

Визначимо потужність джерела ЕРС та її активну та реактивну складові:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{дж} &= \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* = 230 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 6.399 \angle 176.1105^\circ = P_{дж} + j \cdot Q_{дж} = \\
&= 647.582 - j \cdot 1322 (BA).
\end{aligned} \tag{A.54}$$

Визначимо потужності, що обумовлені взаємною індукцією між двома котушками:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{M1} &= \underline{I}_3 \cdot j \cdot X_M \cdot \underline{I}_1^* = 1.806 \angle -156.477^\circ \cdot j \cdot 25 \cdot 6.399 \angle 176.1105^\circ = \\
&= P_{M1} + j \cdot Q_{M1} = 97.047 - j \cdot 272.124 (BA);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{S}_{M2} &= \underline{I}_1 \cdot j \cdot X_M \cdot \underline{I}_3^* = 6.399 \angle -176.1105^\circ \cdot j \cdot 25 \cdot 1.806 \angle 156.477^\circ = \\ &= P_{M2} + j \cdot Q_{M2} = -97.047 - j \cdot 272.124 (BA); \end{aligned} \quad (A.55)$$

$$\begin{aligned}\underline{P}_{M1} + \underline{P}_{M2} &= 0; \\ \underline{Q}_{M1} + \underline{Q}_{M2} &= 2 \cdot \underline{Q}_{M1}.\end{aligned}$$

Розрахуємо активну потужність споживача:

$$\begin{aligned}P_{\text{сп}} &= I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + \text{Re}(\underline{S}_{M1}) + \text{Re}(\underline{S}_{M2}) = \\ &= 6.399^2 \cdot 8 + 4.737^2 \cdot 10 + 1.806^2 \cdot 12 + 0.945^2 \cdot 14 + 1.658^2 \cdot 16 + \dots \quad (A.56) \\ &\dots + \cancel{97.047} - \cancel{97.047} = 647.582 (Bm).\end{aligned}$$

Реактивна потужність споживача дорівнює:

$$\begin{aligned}Q_{\text{сп}} &= I_1^2 \cdot (X_{L1} - X_{C1}) + I_2^2 \cdot (-X_{C2}) + I_3^2 \cdot X_{L2} + I_4^2 \cdot X_{L3} + I_5^2 \cdot (-X_{C3}) + \dots \\ &\dots + \text{Im}(\underline{S}_{M1}) + \text{Im}(\underline{S}_{M2}) = \quad (A.57) \\ &= 6.399^2 \cdot (20 - 30) + 4.737^2 \cdot (-20) + 1.806^2 \cdot 25 + 0.945^2 \cdot 30 + \dots \\ &\dots + 1.658^2 \cdot (-10) - 272.124 - 272.124 = -1322 (Var).\end{aligned}$$

Визначимо відносну похибку за активною та реактивною потужностями:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta P}{P_{\text{дж}}} &= \frac{P_{\text{дж}} - P_{\text{сп}}}{P_{\text{дж}}} \cdot 100\% = \frac{647.582 - 647.582}{647.582} \cdot 100\% = 0; \\ \frac{\Delta Q}{Q_{\text{дж}}} &= \frac{Q_{\text{дж}} - Q_{\text{сп}}}{Q_{\text{дж}}} \cdot 100\% = \frac{1322 - 1322}{1322} \cdot 100\% = 0.\end{aligned} \quad (A.58)$$

Баланс потужностей виконується, то можна рахувати, що розрахунок зроблений вірно з достатньою точністю для електричного кола з взаємної індукції між індуктивними котушками.

Оскільки $P_{M1} > 0$, а $P_{M2} < 0$, то магнітний потік енергії передається з першої котушки до другої.

2.3 Суміщена векторна діаграма струмів та топографічна діаграма напруг для електричного кола з взаємною індукцією

Розглянемо електричну схему, яка представлена на рис. А.20. Поділимо електричне коло на ділянки між заданими точками. Прийнемо за опорний вузол точку b , електричний потенціал якої дорівнює нулю ($\varphi_b = 0$).

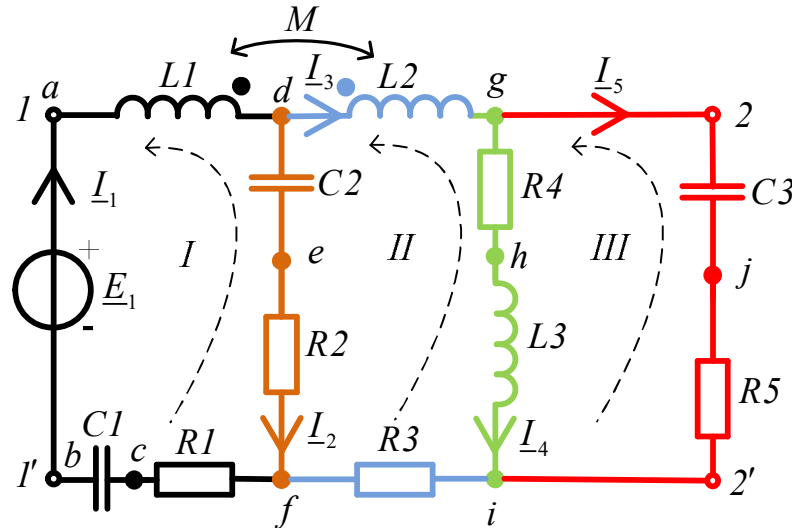


Рисунок А.22 – Електричне коло

Визначимо напругу на елементах електричного кола. Напруги на індуктивних котушках з магнітним зв'язком складаються з напруг самоіндукції \underline{U}_L та напруг взаємоіндукції \underline{U}_M :

$$\begin{aligned}\underline{U}_{cb} = \underline{U}_{C1} &= \underline{I}_1 \cdot (-j \cdot X_{C1}) = 6.399 \angle -176.105^\circ \cdot (-j \cdot 10) = \\ &= -13.041 + j \cdot 191.523 = 191.966 \angle 93.895^\circ (B); \\ \underline{U}_{fc} = \underline{U}_{R1} &= \underline{I}_1 \cdot R_1 = 6.399 \angle -176.105^\circ \cdot 8 = \\ &= -51.073 - j \cdot 3.478 = 51.191 \angle -176.105^\circ (B); \\ \underline{U}_{ef} = \underline{U}_{R2} &= \underline{I}_2 \cdot R_2 = 4.737 \angle 176.537^\circ \cdot 10 = \\ &= -47.282 + j \cdot 2.861 = 47.368 \angle 176.537^\circ (B); \\ \underline{U}_{de} = \underline{U}_{C2} &= \underline{I}_2 \cdot (-j \cdot X_{C2}) = 4.737 \angle 176.537^\circ \cdot (-j \cdot 20) = \\ &= 5.722 + j \cdot 94.563 = 94.736 \angle 86.537^\circ (B); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{L1} &= \underline{I}_1 \cdot j \cdot X_{L1} = 6.399 \angle -176.105^\circ \cdot j \cdot 20 = \\
&= 8.694 - j \cdot 127.682 = 127.978 \angle -86.105^\circ (B); \\
\underline{U}_{M13} &= -\underline{I}_3 \cdot j \cdot X_M = -1.806 \angle -156.477^\circ \cdot j \cdot 25 = \\
&= -18.02 + j \cdot 41.398 = 45.15 \angle 113.523^\circ (B); \\
\underline{U}_{ad} &= \underline{U}_{L1} + \underline{U}_{M13} = 127.978 \angle -86.105^\circ - 45.15 \angle 113.523^\circ = \\
&= -9.326 - j \cdot 86.284 = 86.786 \angle -96.169^\circ (B);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{if} &= \underline{U}_{R3} = \underline{I}_3 \cdot R_3 = 1.806 \angle -156.477^\circ \cdot 12 = \\
&= -19.871 - j \cdot 8.65 = 21.672 \angle -156.477^\circ (B);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{hi} &= \underline{U}_{L3} = \underline{I}_4 \cdot j \cdot X_{L3} = 0.945 \angle 137.828^\circ \cdot j \cdot 30 = \\
&= -19.035 - j \cdot 21.013 = 28.353 \angle -132.172^\circ (B);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{gh} &= \underline{U}_{R4} = \underline{I}_4 \cdot R_4 = 0.945 \angle 137.828^\circ \cdot 14 = \\
&= -9.806 + j \cdot 8.883 = 13.231 \angle 137.828^\circ (B);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{L2} &= \underline{I}_3 \cdot j \cdot X_{L2} = 1.806 \angle -156.477^\circ \cdot j \cdot 25 = \\
&= 18.02 - j \cdot 41.398 = 45.15 \angle -66.477^\circ (B); \\
\underline{U}_{M31} &= -\underline{I}_1 \cdot j \cdot X_M = -6.399 \angle -176.105^\circ \cdot j \cdot 25 = \\
&= -10.868 + j \cdot 159.602 = 159.972 \angle 93.895^\circ (B); \\
\underline{U}_{dg} &= \underline{U}_{L2} + \underline{U}_{M31} = 45.15 \angle -66.477^\circ + 159.972 \angle 93.895^\circ = \\
&= 7.152 + j \cdot 118.204 = 118.42 \angle 86.537^\circ (B);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{ji} &= \underline{U}_{R5} = \underline{I}_5 \cdot R_5 = 1.658 \angle -125.184^\circ \cdot 16 = \\
&= -15.288 - j \cdot 21.685 = 26.352 \angle -125.184^\circ (B);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{gj} &= \underline{U}_{C3} = \underline{I}_5 \cdot (-j \cdot X_{C3}) = 1.658 \angle -125.184^\circ \cdot (-j \cdot 10) = \\
&= -13.553 + j \cdot 9.555 = 16.583 \angle 144.816^\circ (B).
\end{aligned} \tag{A.59}$$

Визначимо комплексні потенціали усіх точок електричного кола. Починаючи від опорного вузла будемо обходити схему назустріч позитивному напрямку струму, як зображено на рис. А.22

$$\begin{aligned}
\underline{\varphi}_b &= 0; \\
\underline{\varphi}_c &= \underline{\varphi}_b + \underline{U}_{C1} = 0 + 191.966 \angle 93.895^\circ = 191.966 \angle 93.895^\circ (B);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_f &= \underline{\varphi}_c + \underline{U}_{R1} = \\ &= 191.966 \angle 93.895^\circ + 51.191 \angle -176.105^\circ = 198.675 \angle 108.827^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_e &= \underline{\varphi}_f + \underline{U}_{R2} = \\ &= 198.675 \angle 108.827^\circ + 47.368 \angle 176.537^\circ = 221.03 \angle 120.264^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\varphi}_d} &= \underline{\varphi}_e + \underline{U}_{C2} = \\ &= 221.03 \angle 120.264^\circ + 94.736 \angle 86.537^\circ = \boxed{304.401 \angle 101.313^\circ} (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\varphi}_a} &= \underline{\varphi}_d + \underline{U}_{ad} = \\ &= 304.401 \angle 101.313^\circ + 86.786 \angle -96.169^\circ = \boxed{230 \angle 120^\circ} (B);\end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{\varphi}_a} = \underline{\varphi}_b + \underline{E}_1 = 0 + 230 \angle 120^\circ = \boxed{230 \angle 120^\circ} (B);$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_i &= \underline{\varphi}_f + \underline{U}_{R3} = \\ &= 198.675 \angle 108.827^\circ + 21.672 \angle -156.477^\circ = 198.081 \angle 115.087^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_h &= \underline{\varphi}_i + \underline{U}_{L3} = \\ &= 198.081 \angle 115.087^\circ + 28.353 \angle -132.172^\circ = 188.94 \angle 123.042^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\varphi}_g} &= \underline{\varphi}_h + \underline{U}_{R4} = \\ &= 188.94 \angle 123.042^\circ + 13.231 \angle 137.828^\circ = \boxed{201.761 \angle 124.001^\circ} (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\varphi}_d} &= \underline{\varphi}_g + \underline{U}_{dg} = \\ &= 201.761 \angle 124.001^\circ + 118.42 \angle 86.537^\circ = \boxed{304.401 \angle 101.313^\circ} (B); \quad (A.60)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_j &= \underline{\varphi}_i + \underline{U}_{R5} = \\ &= 198.081 \angle 115.087^\circ + 26.352 \angle -125.184^\circ = 186.354 \angle 122.189^\circ (B);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\underline{\varphi}_g} &= \underline{\varphi}_j + \underline{U}_{C3} = \\ &= 186.354 \angle 122.189^\circ + 16.583 \angle 144.816^\circ = \boxed{201.761 \angle 124.001^\circ} (B).\end{aligned}$$

За результатами обрахунків будуюмо суміщену векторну діаграму струмів та топографічну векторну діаграму напруг для електричного кола з взаємною індукцією, що зображена на рис. А.23. Де колір векторів струмів та напруг векторної діаграми відповідає кольору ділянки електричного кола представленого на рис. А.22.

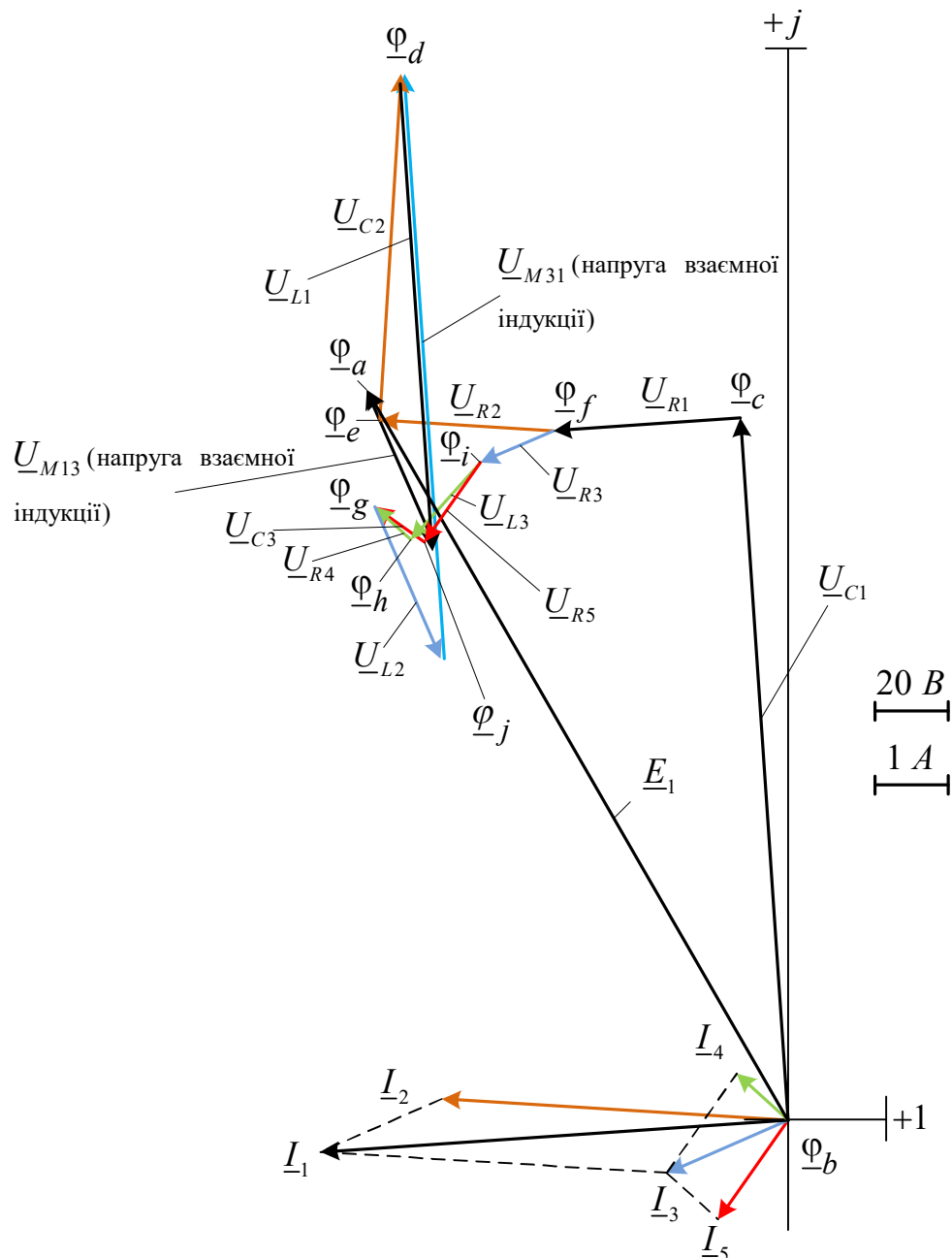


Рисунок А.23 – Суміщена векторна діаграма струмів та топографічна векторна діаграма напруг електричного кола з взаємною індукцією

3 Аналіз пасивного чотириполюсника

3.1 Розрахунок параметрів пасивного чотириполюсника

Відкинувши крайню вітку електричного кола (рис. А.1) між полюсами $2 - 2'$, отримаємо електричну схему, яка представлена на рис. А.24.

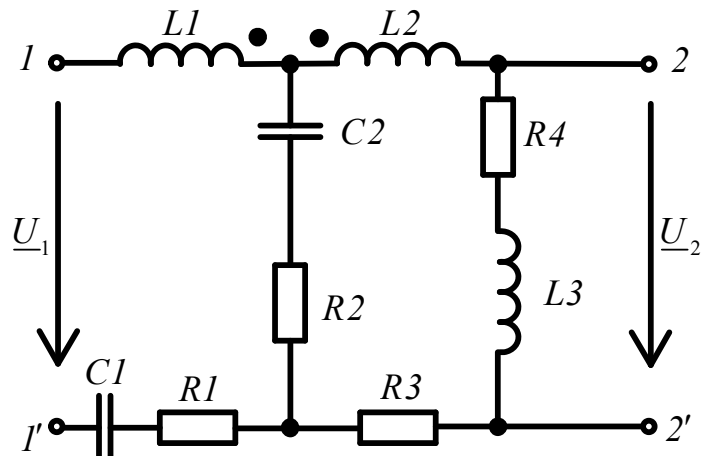


Рисунок А.24 – Електричне коло

Зробимо розв'язок магнітного зв'язку між індуктивними котушками L_1 та L_2 . Так як котушки приєднані однойменними полюсами до загального вузла, то електрична схема (рис. А.24) перетвориться на еквівалентну схему (рис. А.25) без індуктивних зв'язків.

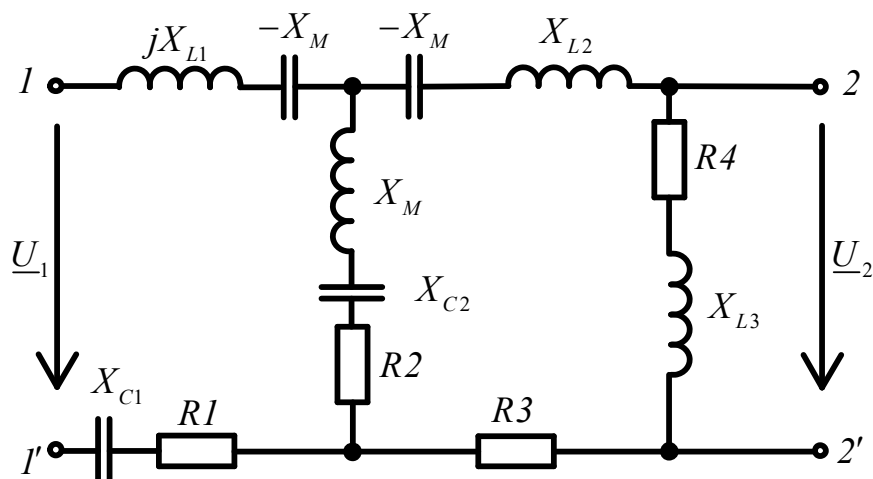


Рисунок А.25 – Електричне коло

3.2 Визначення коефіцієнтів чотириполюсника A, B, C, D

Чотириполюсники характеризуються двома напругами \underline{U}_1 та \underline{U}_2 і двома струмами \underline{I}_1 та \underline{I}_2 . У режимі прямої передачі енергії чотириполюсник описується рівняння в A -формі:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot \underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot \underline{I}_2, \end{cases} \quad (\text{A.61})$$

де $\underline{A}_{11} = \underline{A}$, $\underline{A}_{12} = \underline{B}$, $\underline{A}_{21} = \underline{C}$, $\underline{A}_{22} = \underline{D}$ - первинні коефіцієнти чотириполюсника.

Визначаються первинні коефіцієнти системи (A.61) з дослідів неробочого ходу та короткого замикання з боку вхідних та вихідних полюсів.

Перетворимо електричну схему (рис. A.25), підключаючи послідовно реактивні опори у вітках:

$$\begin{aligned} X'1 &= X_{L1} + (-X_M) = 20 + (-25) = -5(\text{Ом}); \\ X'2 &= X_M + (-X_{C2}) = 25 + (-20) = 5(\text{Ом}); \\ X'3 &= -X_M + X_{L2} = -25 + 25 = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

У спрощеній схемі (рис. A.26) без магнітного зв'язку робимо режим неробочого ходу $\underline{I}_2 = 0$.

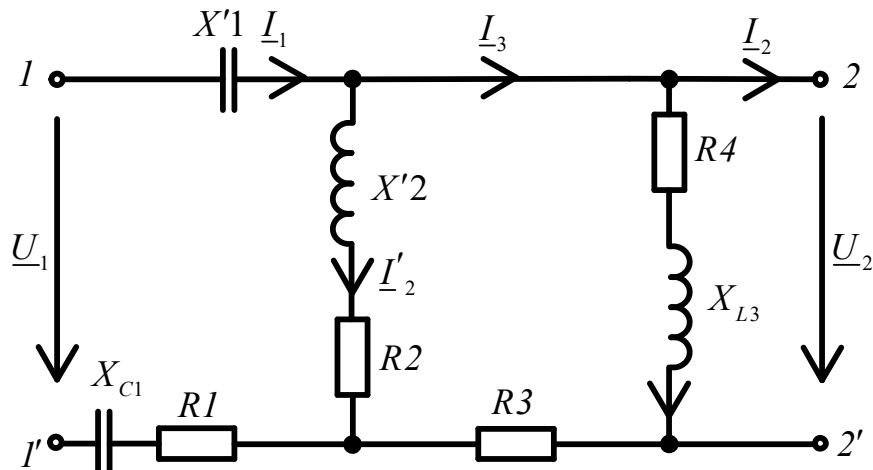


Рисунок A.26 – Електрична схема в режимі неробочого ходу

Визначимо вхідний комплексний опір чотириполюсника відносно полюсів 1–1' у режимі неробочого ходу:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{\text{вх11}'} &= R_1 - j \cdot |X'1| - j \cdot X_{C1} + \frac{(R_3 + R_4 + j \cdot X_{L3}) \cdot (R_2 + j \cdot X'2)}{(R_3 + R_4 + j \cdot X_{L3}) + (R_2 + j \cdot X'2)} = \\ &= 8 - j \cdot 5 - j \cdot 30 + \frac{(12 + 14 + j \cdot 30)(10 + j \cdot 5)}{(12 + 14 + j \cdot 30) + (10 + j \cdot 5)} = \\ &= 15.541 - j \cdot 30.387 = 34.13 \angle -62.913^\circ (\text{Ом}).\end{aligned}\quad (\text{A.63})$$

Розрахуємо струм \underline{I}_1 за законом Ома:

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\text{вх11}'}} = \frac{230 \angle 120^\circ}{34.13 \angle -62.913^\circ} = -6.73 - j \cdot 0.343 = \\ &= 6.739 \angle -177.087^\circ (\text{А}).\end{aligned}\quad (\text{A.64})$$

За правом «чужого плеча» знайдемо струм \underline{I}'_2 :

$$\begin{aligned}\underline{I}'_2 &= \underline{I}_1 \cdot \frac{(R_3 + R_4 + j \cdot X_{L3})}{(R_3 + R_4 + j \cdot X_{L3}) + (R_2 + j \cdot X'2)} = \\ &= 6.739 \angle -177.087^\circ \cdot \frac{(12 + 14 + j \cdot 30)}{(12 + 14 + j \cdot 30) + (10 + j \cdot 5)} = \\ &= -5.279 - j \cdot 0.724 = 5.328 \angle -172.194^\circ (\text{А}).\end{aligned}\quad (\text{A.65})$$

За першим законом Кірхгофа визначимо струм \underline{I}_3 :

$$\begin{aligned}\underline{I}_3 &= \underline{I}_1 - \underline{I}'_2 = 6.739 \angle -177.087^\circ - 5.328 \angle -172.194^\circ = \\ &= -1.451 - j \cdot 0.381 = 1.501 \angle 165.285^\circ (\text{А}).\end{aligned}\quad (\text{A.66})$$

Напруга на виході чотириполюсника \underline{U}_2 дорівнює:

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \underline{I}_3 \cdot (R_4 + j \cdot X_{L3}) = 1.501 \angle 165.285^\circ (14 + j \cdot 30) = \\ &= -31.754 - j \cdot 38.205 = 49.678 \angle -129.731^\circ (\text{В}).\end{aligned}\quad (\text{A.67})$$

Запишемо основні рівняння чотириполюсника через коефіцієнти матриці $\|A\|$ для прямого живлення

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 = \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2, \end{cases} \quad (\text{A.68})$$

Відповідно в досліді неробочого ходу $\underline{I}_2 = 0$, тому коефіцієнти чотириполюсника \underline{A} та \underline{C} дорівнюють:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{230 \angle 120^\circ}{49.678 \angle -129.731^\circ} = -1.604 - j \cdot 4.343 = 4.63 \angle -110.269^\circ; \\ \underline{C} &= \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} = \frac{6.739 \angle -177.087^\circ}{49.678 \angle -129.731^\circ} = 0.092 - j \cdot 0.1 = 0.136 \angle -47.355^\circ (\text{C}_M). \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Розглянемо режим короткого замикання для чотириполюсника, тобто об'єднаємо полюси 2 та 2' ($\underline{U}_2 = 0$), як показано на А.27.

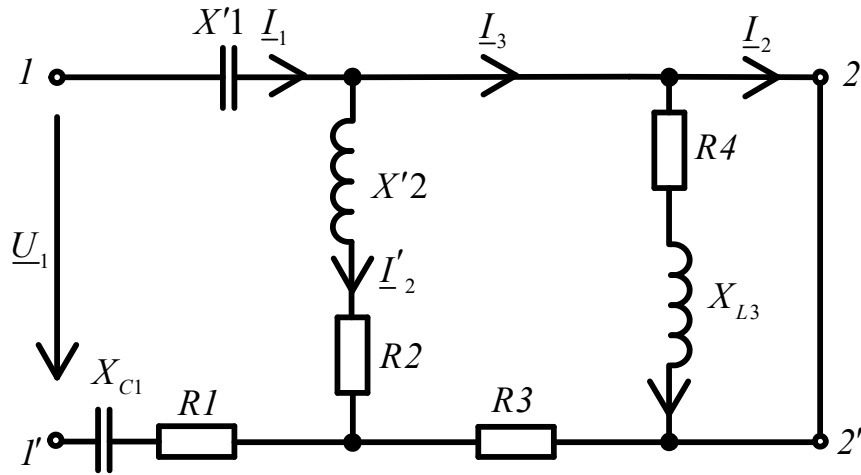


Рисунок А.27 – Електрична схема чотириполюсника у режимі короткого замикання

Визначимо вхідний комплексний опір чотириполюсника відносно полюсів 1–1' у режимі короткого замикання:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}11'} &= R_1 - j \cdot |X'1| - j \cdot X_{c1} + \frac{R_3 \cdot (R_2 + j \cdot X'2)}{R_3 + (R_2 + j \cdot X'2)} = \\ &= 8 - j \cdot 5 - j \cdot 30 + \frac{12 \cdot (10 + j \cdot 5)}{12 + (10 + j \cdot 5)} = \\ &= 13.776 - j \cdot 33.585 = 36.301 \angle -67.698^\circ (\text{Ом}). \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Розрахуємо струм \underline{I}_1 за законом Ома:

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\text{вх11'}}} = \frac{230 \angle 120^\circ}{36.301 \angle -67.698^\circ} = -6.279 - j \cdot 0.849 = \\ &= 6.336 \angle -172.302^\circ (A).\end{aligned}\quad (\text{A.71})$$

За правом «чужого плеча» знайдемо струм \underline{I}'_2 :

$$\begin{aligned}\underline{I}'_2 &= \underline{I}_1 \cdot \frac{R_3}{R_4 + (R_2 + j \cdot X'2)} = \\ &= 6.336 \angle -172.302^\circ \cdot \frac{12}{12 + (10 + j \cdot 5)} = \\ &= -3.357 + j \cdot 0.3 = 3.37 \angle 174.893^\circ (A).\end{aligned}\quad (\text{A.72})$$

За першим законом Кірхгофа визначимо струм \underline{I}_3 :

$$\begin{aligned}\underline{I}_3 &= \underline{I}_2 = \underline{I}_1 - \underline{I}'_2 = 6.336 \angle -172.302^\circ - 3.37 \angle 174.893^\circ = \\ &= -2.922 - j \cdot 1.149 = 3.14 \angle -158.542^\circ (A).\end{aligned}\quad (\text{A.73})$$

Запишемо основні рівняння чотириполюсника через коефіцієнти матриці $\|A\|$ для прямого живлення

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \cancel{A \cdot \underline{U}_2} + \underline{B} \cdot \underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 = \cancel{C \cdot \underline{U}_2} + \underline{D} \cdot \underline{I}_2, \end{cases}\quad (\text{A.74})$$

Відповідно в досліді короткого замикання $\underline{U}_2 = 0$, тому коефіцієнти чотириполюсника B та D дорівнюють:

$$\begin{aligned}\underline{B} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} = \frac{230 \angle 120^\circ}{3.14 \angle -158.542^\circ} = 10.88 - j \cdot 72.44 = 73.252 \angle -81.458^\circ (Om); \\ \underline{D} &= \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{6.336 \angle -172.302^\circ}{3.14 \angle -158.542^\circ} = 1.96 - j \cdot 0.48 = 2.018 \angle -13.761^\circ.\end{aligned}\quad (\text{A.75})$$

Достовірність розрахунків перевіряємо за рівнянням зв'язку (умова взаємності)

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} &= 4.63 \angle -110.269^\circ \cdot 2.018 \angle -13.761^\circ - \dots \\ \dots - 73.252 \angle -81.458^\circ \cdot 0.136 \angle -47.355^\circ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

Умова (A.76) виконується, тому можна стверджувати, що коефіцієнти чотириполюсника у A - формі знайдені вірно.

3.3 Визначення ЕРС та струму I_1 на вході чотириполюсника, якщо напруга на його виході $U_2 = 100(B)$, струм $I_2 = 1(A)$, а кут зсуву фаз між синусоїдами напруги та струму $\varphi_2 = 30^\circ$

Нехай вихідна напруга $\underline{U}_2 = 100 \angle 30^\circ (B)$, а струм навантаження $\underline{I}_2 = 1(A)$. Визначимо ЕРС та струм на вході чотириполюсника, електрична схема якого зображена на рис. А.28.

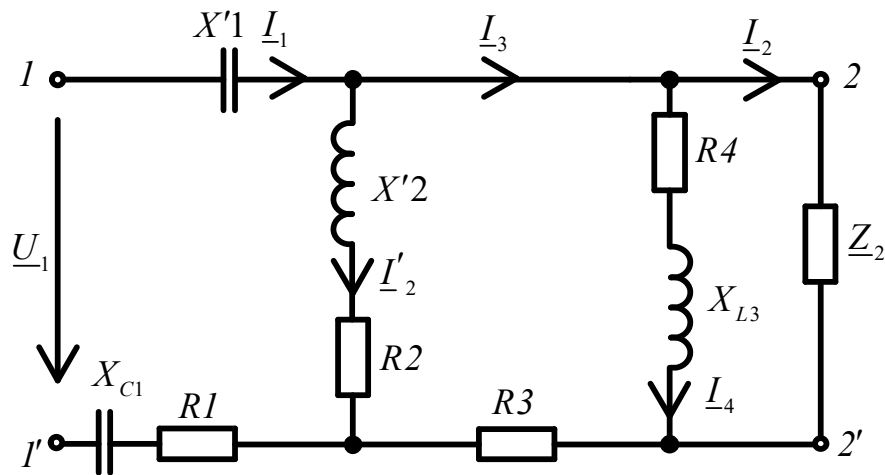


Рисунок А.28 – Електрична схема чотириполюсника під час навантаження на комплексний опір \underline{Z}_2

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2 = \\ &= 4.63 \angle -110.269^\circ \cdot 100 \angle 30^\circ + 73.252 \angle -81.458^\circ \cdot 1 = \\ &= 89.138 - j \cdot 538.76 = 536.221 \angle -80.431^\circ (B); \\ \underline{I}_1 &= \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2 = \\ &= 0.136 \angle -47.355^\circ \cdot 100 \angle 30^\circ + 2.018 \angle -13.761^\circ \cdot 1 = \\ &= 14.908 - j \cdot 4.526 = 15.58 \angle -16.89^\circ (A). \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Значення ЕРС на вході чотириполюсника дорівнює напрузі \underline{U}_1

$$\underline{E}_1 = \underline{U}_1 = 536.221 \angle -80.431^\circ (B).$$

Визначимо комплекс опору навантаження чотириполюсника \underline{Z}_2

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{100 \angle 30^\circ}{1} = 86.603 + j \cdot 50 = 100 \angle 30^\circ (Om). \quad (A.78)$$

Перевіримо правильність виконаних розрахунків, навантаживши чотириполюсник на опір \underline{Z}_2 . Визначимо значення струмів електричної схеми, що представлена на рис. А.28. За другим законом Кірхгофа знайдемо струм \underline{I}'_2 :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 \cdot (R_1 - j \cdot |X'1| - j \cdot X_{C1}) + \underline{I}'_2 \cdot (R_2 + j \cdot X'2) &= \underline{E}_1; \\ \underline{I}'_2 &= \frac{\underline{E}_1 - \underline{I}_1 \cdot (R_1 - j \cdot |X'1| - j \cdot X_{C1})}{R_2 + j \cdot X'2} = \\ &= \frac{536.221 \angle -80.431^\circ - 15.58 \angle -16.89^\circ \cdot (8 - j \cdot 5 - j \cdot 30)}{10 + j \cdot 5} = \\ &= 11.433 - j \cdot 2.795 = 11.769 \angle -13.736^\circ (A). \end{aligned} \quad (A.79)$$

За першим законом Кірхгофа визначимо струм \underline{I}_3 :

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= \underline{I}_1 - \underline{I}'_2 = 15.58 \angle -16.89^\circ - 11.769 \angle -13.736^\circ = \\ &= 3.475 - j \cdot 1.732 = 3.882 \angle -26.491^\circ (A). \end{aligned} \quad (A.80)$$

За правом «чужого плеча» знайдемо струм \underline{I}'_2 :

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_3 \cdot \frac{(R_4 + j \cdot X_{L3})}{\underline{Z}_2 + (R_4 + j \cdot X_{L3})} = \\ &= 3.882 \angle -26.491^\circ \cdot \frac{(14 + j \cdot 30)}{100 \angle 30^\circ + (14 + j \cdot 30)} = 1(A). \end{aligned} \quad (A.81)$$

Напруга на виході чотириполюсника $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = 1 \cdot 100 \angle 30^\circ = 100 \angle 30^\circ (B)$. Відповідно значення ЕРС та струму \underline{I}_1 на вході чотириполюсника знайдені вірно.

3.4 Розрахунок параметрів R, L, C віток Т-схеми заміщення

Представимо електричну схему чотириполюсника у вигляді Т- схеми заміщення, яка зображена на рис. А.29.

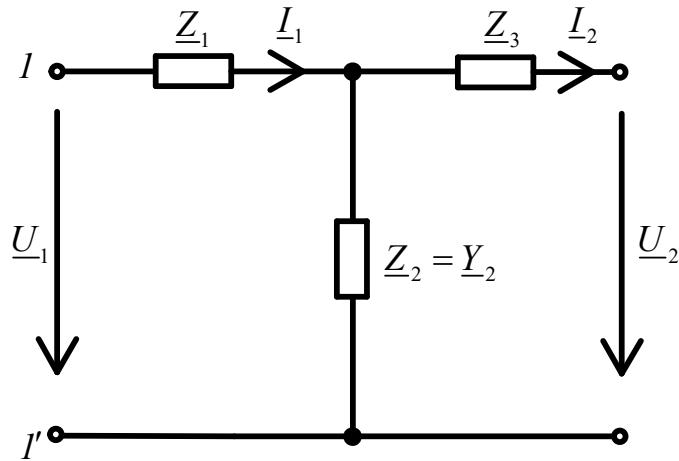


Рисунок А.29 – Т- подібна схема заміщення чотириполюсника

Визначимо комплекси опорів Т-подібної схеми:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= \frac{\underline{A}-1}{\underline{C}} = \frac{4.63 \angle -110.269^\circ - 1}{0.136 \angle -47.355^\circ} = \\ &= 10.547 - j \cdot 35.809 = 37.33 \angle -73.589^\circ (Ом);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 &= \frac{1}{\underline{C}} = \frac{1}{0.136 \angle -47.355^\circ} = \\ &= 4.994 + j \cdot 5.422 = 7.372 \angle 47.355^\circ (Ом);\end{aligned} \tag{A.82}$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_3 &= \frac{\underline{D}-1}{\underline{C}} = \frac{2.018 \angle -13.761^\circ - 1}{0.136 \angle -47.355^\circ} = \\ &= 7.397 + j \cdot 2.808 = 7.912 \angle 20.79^\circ (Ом).\end{aligned}$$

Активні складові $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ є додатними, відповідно чотириполюсник можна замінити пасивною Т-подібною схемою заміщення.

3.5 Визначення вторинних параметрів чотириполюсника

За відомими первинними коефіцієнтами чотириполюсника розрахуємо характеристичний опір \underline{Z}_{c1} з боку вхідних затискачів 1 – 1' :

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{c1} &= \sqrt{\frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{D}}} = \sqrt{\frac{(4.63 \angle -110.269^\circ) \cdot (73.252 \angle -81.458^\circ)}{(0.136 \angle -47.355^\circ) \cdot (2.018 \angle -13.761^\circ)}} = \\ &= 14.705 - j \cdot 31.98 = 35.199 \angle -65.306^\circ (Ом).\end{aligned}\quad (A.83)$$

Характеристичний опір \underline{Z}_{c2} з боку вихідних затискачів 2 – 2' :

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{c2} &= \sqrt{\frac{\underline{D} \cdot \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{A}}} = \sqrt{\frac{(2.018 \angle -13.761^\circ) \cdot (73.252 \angle -81.458^\circ)}{(0.136 \angle -47.355^\circ) \cdot (4.63 \angle -110.269^\circ)}} = \\ &= 13.122 + j \cdot 7.948 = 15.342 \angle 31.202^\circ (Ом).\end{aligned}\quad (A.84)$$

Коефіцієнт поширення (передачі) чотириполюсника:

$$\begin{aligned}\underline{\gamma} &= \ln(\sqrt{\underline{A} \cdot \underline{D}} + \sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}}) = \ln(\sqrt{4.63 \angle -110.269^\circ \cdot 2.018 \angle -13.761^\circ} + ... \\ &... + \sqrt{73.252 \angle -81.458^\circ \cdot 0.136 \angle -47.355^\circ}) = 2.717 - j0.881;\end{aligned}\quad (A.85)$$

$\alpha = \text{Re}(\underline{\gamma}) = \text{Re}(2.717 - j0.881) = 2.717 (Hn)$ – коефіцієнт згасання;

$\beta = \text{Im}(\underline{\gamma}) = \text{Im}(2.717 - j0.881) = -0.881 (рад)$ – коефіцієнт фази.

3.6 Визначити значення напруги \underline{U}_2 та струму \underline{I}_2 при заданій ЕРС на вході в узгодженому режимі чотириполюсника за вторинними параметрами

Задана напруга на вході чотириполюсника $\underline{U}_1 = 230 \angle 120^\circ (В)$. Напруга на виході чотириполюсника в узгодженому режимі дорівнює:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} \cdot e^{-\gamma} = 230 \angle 120^\circ \cdot \sqrt{\frac{15.342 \angle 31.202^\circ}{35.199 \angle -65.306^\circ}} \cdot e^{-(2.717 - j0.881)} = \quad (\text{A.86})$$

$$= -7.824 - j \cdot 6.278 = 10.031 \angle -141.257^\circ (B).$$

Визначимо за законом Ома струм \underline{I}_2 :

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{C2}} = \frac{10.031 \angle -141.257^\circ}{15.342 \angle 31.202^\circ} = \quad (\text{A.87})$$

$$= -0.648 - j \cdot 0.086 = 0.654 \angle -172.459^\circ (A).$$

Під час узгодженого навантаження вхідний опір чотирипол'юсника дорівнює характеристичному, тому

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{C1}} = \frac{230 \angle 120^\circ}{35.199 \angle -65.306^\circ} = -6.506 - j \cdot 0.604 = \quad (\text{A.88})$$

$$= 6.534 \angle -174.694^\circ (A).$$

Вихідний струм при узгодженому режимі визначається за формулою:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} \cdot e^{-\gamma} = 6.534 \angle -174.694^\circ \cdot \sqrt{\frac{35.199 \angle -65.306^\circ}{15.342 \angle 31.202^\circ}} \cdot e^{-(2.717 - j0.881)} = \quad (\text{A.89})$$

$$= -0.648 - j \cdot 0.086 = 0.654 \angle -172.459^\circ (A).$$

ВИСНОВКИ

Під час виконання розрахунково-графічної роботи засвоєно основні положення теорії лінійних кіл із зосередженими параметрами однофазного синусоїдного струму та загальні правила зображення електричних схем згідно з ЄСКД та ДСТУ.

Досліджено коло змінного струму без взаємної індукції комплексним методом, визначення показу вольтметра, векторна діаграма струмів та топографічна діаграма напруг, визначення умов резонансу в електричному колі, частотна характеристика вхідного опору кола. Також виконано

розрахунок електричного кола при наявності магнітного зв'язку між індуктивними елементами та побудовано векторну діаграму струмів і топографічну діаграму напруг (на діаграмі позначені напруги взаємної індукції). Проаналізовано пасивний чотириполюсник, визначено його первинні і вторинні параметри для системи рівнянь *A*-форми та розраховано значення параметрів елементів *R*, *L*, *C* для Т або П - схеми заміщення. Достовірність розрахованих струмів та напруг у електричних схемах перевірено за допомогою складання балансу активних та реактивних потужностей електричного кола.

Визначено переваги та недоліки представленого комплексного методу та суміщених векторних діаграм струмів та топографічних діаграм напруг, які застосовуються при аналізі електричних кіл однофазного синусоїдного струму без взаємної індукції та з магнітним зв'язком між індуктивними елементами, а саме **(додати власні висновки, що до виконання розрахунково-графічної роботи)...**

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. ДСТУ 8302:2015 Інформація та документація. Бібліографічне посилання. Загальні положення та правила складання. – Чинний від 01.07.2016. – Київ: Держстандарт України, 2015 -16 с.
2. ДСТУ 3008:2015: Звіти у сфері науки і техніки. Структура та правила оформлення. – Чинний від 01.07.2017. – Київ: Держстандарт України, 2015 -16 с.